Спецсеминар Морозов Владимир Викторович
Американские опционы

1) в конце контр.
2) Теория + задача на камне
3) В конце года курсовая

V – $n \times n$ матрица – симметричная, полож. опред.

Теорема:
V – полож. опред. необ. и дост. $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$

$V = U^* \Lambda U$, $U^* U = I$

Дост. $\lambda_i > 0 \Rightarrow V$ – полож. опр.

$$(Vx,x) = (U^* \Lambda U x, x) = (\Lambda U x, Ux) = (\Lambda y, y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 > 0$$

$y = Ux \neq 0$, $x \neq 0$, U – невырожд.

! Д/З: 1) Д-ть необх. V полож. опр. $\Rightarrow \lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$

2) V - полож. опр. $\Rightarrow V^{-1}$ – полож. опр. матр.: $Vx = \lambda x \Rightarrow \frac{1}{\lambda} x = V^{-1} x$

3) V - полож. опр. $\Rightarrow \exists V^{\frac{1}{2}}$ - полож. опр. т.ч. $V = V^{\frac{1}{2}} \cdot V^{\frac{1}{2}}$

$$V = U^* \Lambda U = U^* \Lambda^{\frac{1}{2}} \cdot \Lambda^{\frac{1}{2}} U = \underbrace{U^* \Lambda^{\frac{1}{2}} U}_{V^{\frac{1}{2}}} \underbrace{U^* \Lambda^{\frac{1}{2}} U}_{V^{\frac{1}{2}}}$$

4) V - полож. опр. $|V^{\frac{1}{2}}| = |V|^{\frac{1}{2}}$ – доказать.

Перейдем к многомерным норм. распределениям

$X_1, \dots, X_n$ – норм. распр. сл. вел. $EX_i = 0$, $i = 1, \dots, n$

$Var\, X_i = EX_i^2 - (EX_i)^2 = EX_i = \sigma_i^2$

$Cov(X_i, X_j) = E[(X_i - EX_i)(X_j - EX_j)] = E(X_i \cdot X_j) = \sigma_{ij}$

Если $i = j$, то $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$

$V = (\sigma_{ij})_{n \times n}$ – полож. $\Rightarrow \sigma_{ij} > 0$

$X = (X_1, \dots, X_n)$

$$\varphi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \cdot \frac{1}{|V|^{1/2}} \cdot e^{-\frac{(V^{-1}x, x)}{2}}$$

Чтобы она была плотностью

1) Она должна быть $\varphi(x) > 0$.

2) $\int\limits_{E^n} \varphi(x)\, dx = 1 = \int\limits_{E^n} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{(y,y)}{2}} dy = \int\limits_{E^n} \prod_{i=1}^{n} \varphi(y_i)\, dy_1 \dots dy_n = 1$

- $(V^{-1}x, x) = (V^{-\frac{1}{2}} V^{-\frac{1}{2}} x, x) = (V^{-\frac{1}{2}} x, V^{-\frac{1}{2}} x) = \{$ введем замену:

$y = V^{-\frac{1}{2}} x \Rightarrow x = V^{\frac{1}{2}} y \} = (y, y)$

пояснение

- $dx = dx_1 \dots dx_n = \underbrace{|V^{\frac{1}{2}}|}_{\text{определитель}} dy_1 \dots dy_n$ $= |V|^{\frac{1}{2}}$

- $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_i^2/2} = \varphi(y_i)$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y_i) dy_i = 1$

$E x_i = 0$, $V^{\frac{1}{2}} = (\xi_{ij})$ $x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{ik} y_k$

$\int\limits_{E^n} x_i \, \varphi_i(x) dx = 0$

$\int\limits_{E^n} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{ki} y_k \prod\limits_{i=1}^{n} \varphi(y_i) dy_1 \dots dy_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{ki} \int\limits_{E^n} y_k \cdot \varphi(y_k) \cdot \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \varphi(y_i) dy_1 \dots dy_n =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{ki} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} y_k \varphi(y_k) dy_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{ki} \, E X_k = 0$

$x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{ki} y_k$, $V^{\frac{1}{2}} = (\xi_{ij})$

$\sigma_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{ik} \xi_{kj}$

! Д/З:

1) $E[X_i X_j] = \int\limits_{E^n} x_i x_j \, \varphi(x) dx = \sigma_{ij}$

2) $n = 2$: $V = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, $X = (X_1, X_2)$, $\rho \to \in (-1, 1)$ $\rho \to$ ковар. + коэф. корел.

$\varphi(x)$: Найти плотность двумерной норм. распр.

2

Модель Блэка-Шоулза для финанс. рынка

$S(t)$ – сумма

$$\boxed{dS(t) = S(t)\cdot(\alpha dt + \sigma dz(t))}$$

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \alpha dt + \sigma dz(t), \quad \sigma > 0$$

где $z(t)$ – станд. винер. процесс

$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq T$

$z(t_1), \ldots, z(t_n)$, $n = 1, 2, \ldots$

$V = (\sigma_{ij} = \min(t_i, t_j))$

$$V = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & & t_1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_2 \\ \vdots & & t_3 \cdots & t_3 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_1 & t_2 & t_3 \cdots & t_n \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$ вычтем 1 строку потом 2-ю строку из всех остальных

$$V = \begin{pmatrix} t_1 & \cdots & & t_1 \\ 0 & t_2 - t_1 & \cdots & t_2 - t_1 \\ 0 & t_2 - t_1 & t_3 - t_1 \cdots & t_3 - t_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & t_n - t_1 \end{pmatrix}$$

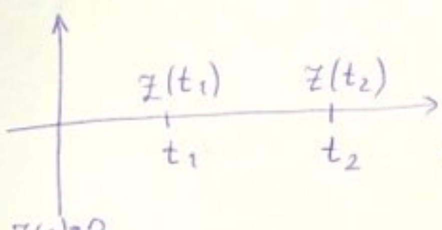
$\det V = t_1 \cdot (t_2 - t_1) \cdot (t_3 - t_2) \cdot \ldots \cdot (t_n - t_{n-1}) > 0$

$z(t) \sim N(0, t)$

$z(t_2) - z(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1)$

$Var(z(t_2) - z(t_1)) = E(z(t_2) - z(t_1))^2 - 0 = E[z(t_2)^2 - 2z(t_1)\cdot z(t_2) + z(t_1)^2] =$

$= t_1 + t_2 - \underset{t_2 - t}{2t_1}$ $(\min(t_i, t_j))$?



Д-ть, что $z(t_1)$ и $z(t_2) - z(t_1)$ независимы

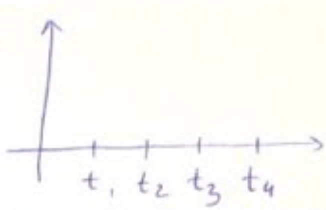
▶ св-во норм. вел.: X, Y - незав $\Leftrightarrow$ $E(X \cdot Y) = EX \cdot EY$

$z(0) = 0$

$$\underset{E(z(t_1)(z(t_2) - z(t_1))}{\underset{\parallel}{cov(z(t_1), z(t_2) - z(t_1))}} = cov(z(t_1), z(t_2)) - cov(z(t_1), z(t_1)) = t_1 - t_1 = 0$$

■

Д/З:



4-х мерное распределение

Д-ть, что $z(t_2) - z(t_1)$ и $z(t_4) - z(t_3)$ независимы (через cov)

$V = (\sigma_{ij})_{n \times n}$

$E[x_i \cdot x_j] = \sigma_{ij}$

$\| \overset{\shortparallel}{\mathrm{cov}}(x_i, x_j)$

$= \int\limits_{E^n} x_i x_j \varphi(x) dx = \int\limits_{E^n} \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_{ik} y_k\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \xi_{jk} y_k\right) \cdot \prod_{k=1}^{n} \varphi(y_k) dy_1 \dots dy_n \circleddash$

двойная сумма

$y_i y_j \varphi(y_i) \varphi(y_j)$ - т.к. незав., то $= 0$ при $i \neq j$

$\Rightarrow$ остается лишь квадрат

$\circleddash \int\limits_{E^n} \sum \xi_{ik} \xi_{jk} y_k^2 \prod_{m=1}^{n} \varphi(y_m) dy_1 \dots dy_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_{ik} \xi_{jk} = \sigma_{ij}$

интеграл $= 1$
лишь при $k = m$

$\begin{cases} EX = 0 \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx = EX^2 = \mathrm{Var} X = 1 \end{cases}$

Задача: $V = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ $\quad |V|^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1-\rho^2}$

$V^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \dfrac{1}{(1-\rho^2)}$

$\varphi(x_1, x_2) = \dfrac{1}{2\pi} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2)}{2(1-\rho^2)}}$

Определение винеровского процесса по Колмогорову

Вин. процесс: $z(t_2) - z(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1)$

процесс состоит из случ. вел.

$z(0) = 0$; $z(t)$, $t \in [0, T]$

Вер-е прост-во $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

P $\to$ мера

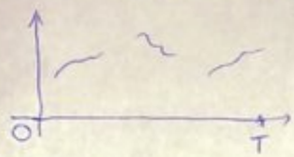
$\mathcal{F}$ $\to$ сигма алгебра - система мн-в

Ω $\to$ мн-во простых незав.

замкн. отн-но $\cup$ и $\cap$
объед. перес.

$P(\Omega) = 1, \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(x_i)$

В качестве $\Omega = \{z(\cdot)\}$ – пр-во элементарных событий.



Подмн-во – интервал в Ω
Интервал – подмн-во в Ω.

<u>Опр</u>. Рассм-м набор т. $0 < t_1 < \ldots < t_n \leq T$ и числа $a_i < b_i$, $i = \overline{1,n}$

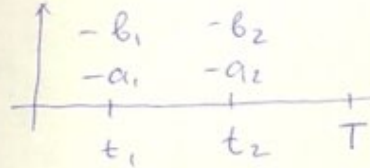
$\Pi(t_i, a_i, b_i, i = \overline{1,n}) = \Pi(\cdot)$ = <u>мн-во интервалов</u> $\Leftrightarrow$
Мн-во ф-ий удовл. $a_i \leq z(t_i) \leq b_i$, $i = \overline{1,n}$

$\Leftrightarrow \{z(\cdot) \mid a_i \leq z(t_i) \leq b_i\}$
можно и строгие нер-ва

Рассм-м 2 интервал.

$\Pi_1 = \{z(\cdot) \mid a_1 < z_1 < b_1\}$, $\Pi_2 = \{z(\cdot) \mid a_2 < z_2 < b_2\}$

Их можно пересеч. или объед.



$\Pi_1 \cap \Pi_2 = \{z(\cdot) \mid a_i < z_i < b_i,\ i = \overline{1,n}\}$

$\Pi_1 \cup \Pi_2 = \left\{z(\cdot) \,\middle|\, \begin{matrix} \text{либо } a_1 < z(t_1) < b_1 \\ \text{либо } a_2 < z(t_2) < b_2 \end{matrix}\right\}$

В результате получится $\mathcal{F}$ – сигма-алгебра.

Определим меру на интервале $z(t_1) \ldots z(t_n)$

$\varphi(x)$ – многомер. норм. плотность | (имеют многомер норм. распр. с матр. $V = (\sigma_{ij} = \min(t_1, t_2))$)

$\mathbb{P}(\Pi(\cdot)) = \int\limits_{\Pi(\cdot)} \varphi(x)\, dx$ – вероятн. попасть в интервал. (фактически в параллепипед)

1-е определили для любых интервалов, но нужно определить для всего $\mathcal{F}$. и <u>Колмогоров</u> продлил ее.

Определим процесс

Можно опр-ть семейство $\mathcal{F}$: $\mathcal{F}_t < \mathcal{F}_s$, $t < s$.
Опр. аналогично, но при услов. $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leq t$ и можно объед. и пересеч.: получим $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} = \mathcal{F}_T$
И получ. фильтрация: система сигма-алгебр вложен. друг в друга.

Опр. случ. вел. $z(t)$

Колмогоров: измеримая ф-я $z(\cdot) \to z(t)$.

Покажем её измерим. $\{z(\cdot) \mid z(t) \le b\} \in \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$

это мн-во интервалов по опр.

И по опр. это эл-т сигма алгебры

При каждом t

есть с.в $\Rightarrow$ есть процесс, Он же Винеровский.

Книга: Крамеров и Бэкка „Стацион. случ. вел“.

Опр. $\xi(t)$ – согласован с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t\}$,

если кажд. $\xi(t)$ $\mathcal{F}_t$ – измерима: $\{\xi(t) \le b\} \in \mathcal{F}_t$.

Пример:

$S(t)$ – стоимость акции.

$dS(t) = S(t)\,(\alpha\,dt + \sigma\,dz(t))$

$S(t) = S \cdot e^{\tilde{\alpha} t + \sigma z(t)}$, $\tilde{\alpha} = \alpha - \dfrac{\sigma^2}{2}$

Упр. Д-ть, что $S(t)$ согласов. с фильтрацией $\mathcal{F}_t$

или с винер. процессом

показать, что $S(t) \le b$

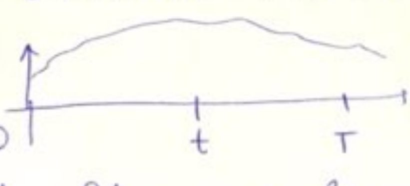
Нужно показать $\{z(\cdot) \mid S(t) \le b\} \in \mathcal{F}_t$.

Кажд. функ. сопост. $Z(t)$ воспольз., что $z(t)$ – соглас

$Se^{\tilde{\alpha} t + \sigma z(t)} \le b$; $\tilde{\alpha} t + \sigma z(t) \le \ln \frac{b}{S}$

$$z(t) \le \frac{\ln \frac{b}{S} - \tilde{\alpha} t}{\sigma} < \frac{\ln \frac{b}{S}}{\sigma} = \ln \sqrt[\sigma]{b/S}$$

Момент остановки



Опр. М.о. случ. вел. $\tau : \Omega \to [0, T]$

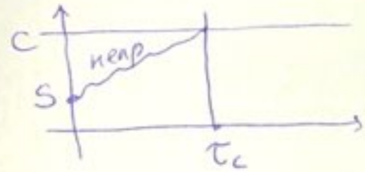
По опр. она измер. требуется чтобы

Рассм-м $\{z(\cdot) \mid \tau(z(\cdot)) \le t\} \in \mathcal{F}_t$

зафикс. $t \in [0, T]$

Пример: Пороговое решающее правило

$$\tau_c = \min\{t \mid S(t) = c\}$$



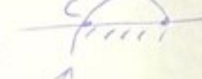
Нужно показать, что $\{z(\cdot) \mid \tau_c(z(\cdot)) \le t\} \in \mathcal{F}_t$

Рассм-м процесс $M(t) = \max\limits_{0\le t_1 \le t} S(t)$ - максим. стоимость акции на $[0,t]$

$$\{\tau_c \le t\} = \{M(t) \ge c\} = \{z(\cdot) \mid \max_{0\le t_1\le t} S(t) \ge c\} =$$

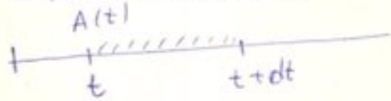
(достигли уровня $\Longleftrightarrow$ событие произошло

$$= \{z(\cdot) \mid \max_{\substack{0\le t_1\le t \\ t_1 \in Q}} S(t) \ge c\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{т.е. если достиг} \\ \text{уровня, то} \\ \text{какое-то время} \\ \text{там находитсь} \\ \text{и найдется рац.} \\ \text{число} \end{array} \right\} =$$



$$= \bigcup_{\substack{t_1 \in Q \\ 0\le t_1\le t}} \{z(\cdot) \mid S(t_1) \ge c\} \in \mathcal{F}_t$$

$S(t)$-стоимость



$\delta > 0$ $\delta S(t)dt$ - выплатится дивидентов

$$\frac{\delta S(t)\,dt}{S(t)} = \delta\, dt$$

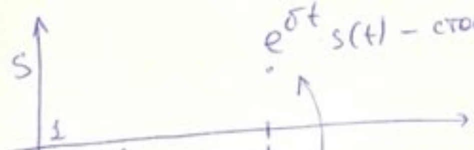
$A(t+dt) = A(t)(1+\delta dt)$ – будет столько акций в $t+dt$

$d\,A(t) = A(t)\delta\, dt$

$A(t) = Ce^{\delta t} = e^{\delta t}$

$A(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

Условие риск-нейтральности инвестора



$e^{\delta t} s(t)$ – стоимость акций

дисконтируем и берем E (мат. ожид)

$\boxed{E\left[e^{-rt} e^{\delta t} S(t)\right] = S}$ - усл. риск-н. $\qquad \tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$

$\Updownarrow$ $r = \alpha + \delta$

$$E\left[e^{-rt} e^{\delta t} S\, e^{\tilde{\alpha} t + \sigma z(t)}\right] = e^{-(r-\delta)t} S \cdot E\left[e^{\tilde{\alpha} t + \sigma z(t)}\right] =$$

$$= e^{-(r-\delta-\alpha+\frac{\sigma^2}{2})t} S\cdot E[e^{\sigma z(t)}] \Rightarrow$$

$X \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$

$h(\lambda) = E[e^{\lambda x}] = e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}+\lambda a}$ — Д-ть, вычислить

$z(t) \sim \mathcal{N}(0,t)$

$$\Rightarrow E[e^{\sigma z(t)}] = e^{\frac{\sigma^2 t}{2}}$$

$$h(\lambda) = E[e^{\lambda x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{2\sigma^2\lambda x - x^2 + 2ax - a^2}{2\sigma^2}\right)dx =$$

$$= \frac{e^{2a\lambda\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-(a+\sigma^2\lambda))^2}{2\sigma^2}}dx = \frac{e^{\frac{2a\lambda\sigma^2+\lambda^2\sigma^4}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{p^2}{2}}dp =$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{a\lambda+\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$$

18.09.19г.

Повторили прошлое:

$X \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$

$h(\lambda) = E[e^{\lambda x}] = e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}+a\lambda}$

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{|x-a|^2}{\sigma^2}}$ — плотность

$E[e^{\lambda x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda x} f(x)dx$

Условие риск-нейтральности

$S(t)$ — стоимость акции, $\delta > 0$

$$\overset{1}{\underset{t}{+}} \longrightarrow \overset{1+\delta dt}{\underset{t+dt}{+}}$$ дивиденды

$A(t+dt) - A(t) = A(t)\delta dt$

$E[e^{-rt} e^{\delta t} S(t) \,|\, S(0) = S] = S$ — усл. р-н

(*) $dS(t) = S(t)(\alpha\, dt + \sigma\, dz(t))$ – Модель Блэка-Шоулза

α – средняя доходность

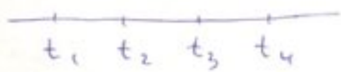
σ – волотильность

$z(t)$ – винеровский процесс, $z(t) \sim N(0,t)$

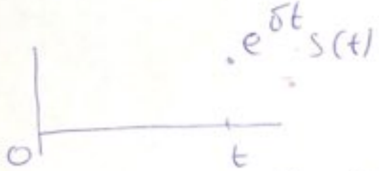
Решение уравн. (*):

$S(t) = Se^{\tilde{\alpha} t + \sigma z(t)}$, где $\tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$

$z(t_2) - z(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1)$



$\Rightarrow \underbrace{z(t_4) - z(t_3) \quad и \quad z(t_2) - z(t_1)}_{независ.\ случ.\ вел.}$



$$E[s e^{-(r-\delta)t} e^{\tilde{\alpha} t + \sigma z(t)}] = e^{-(r-\delta-\alpha+\frac{\sigma^2}{2})t} E[e^{\sigma z(t)}] =$$

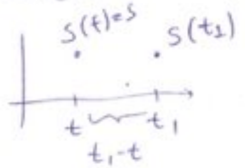
$$= Se^{\frac{\sigma^2 t}{2} - rt + \delta t + \alpha t - \frac{\sigma^2 t}{2}} = Se^{(\delta+\alpha-r)t} = Se^{-(r-\delta-\alpha)t} = S$$

$e^{-(\delta - r - \alpha)t} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{r = \delta + \alpha}$ доходность

банк ставка, дивид.

$E[e^{-(r-\delta)t} S(t) \mid S(0) = S] = S$

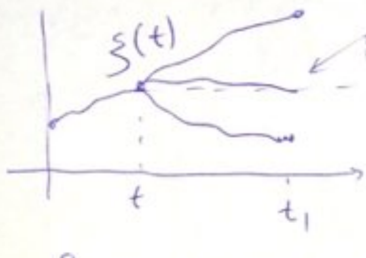
$E[e^{-\alpha t} S(t) \mid S(0) = S] = S$



$\Rightarrow E[e^{-\alpha(t_1 - t)} S(t_1) \mid S(t) = S] = S = S(t)$

$E[e^{-\alpha t_1} S(t_1) \mid S(t) = s] = Se^{-\alpha t} = S(t) e^{-\alpha t}$

$e^{-\alpha t} S(t)$ – мартингал



$$E[\xi(t_1)\,|\,\xi(t)] = \xi(t)$$ — свойство мартингала

Американские опционы

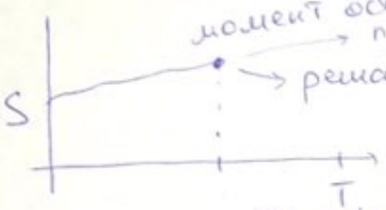
$$\left\{\begin{array}{l} S(t) > K \text{ — есть доход, цена } K \\ S(t) \le k \text{ — нет дохода} \\ (S(t)-k)^+ = \begin{cases} S(t)-K, & S(t) > k \\ 0, & S(t) \le k \end{cases} \end{array}\right.$$

колл-опцион (покупка)

$$\left\{ K - S(t) > 0 \;:\; (K - S(t))^+ \right.$$

пут-опцион (продажа)
(мы заставим кого-то купить опцион :))

момент остановки = случ. вел
→ продает акцию в этот момент
→ решающее правило



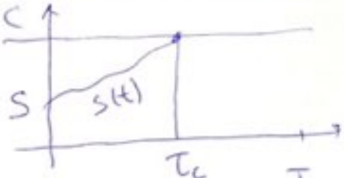
$\tilde{\alpha} t + \tilde{\sigma} z(t)$

$$S(t) = S e^{\tilde{\alpha} t + \tilde{\sigma} z(t)}$$

$$\tau : \Omega = \{z(\cdot)\} \to [0, T]$$

М.О = пороговое решающее правило

Пор. реш. пр.

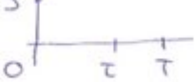


$$\tau_c = \min\{t \,|\, S(t) = C\}$$ — в этот момент предъявляет

Теорема 1 (о преобраз. свободного выбора) (sampling theorem)

$\xi(t)$ — мартингал

τ — м.о., $0 \le \tau \le T$

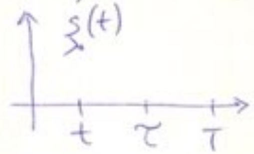


$$\Rightarrow \boxed{E[\xi(\tau)\,|\,\xi(0)] = \xi(0)}$$

это простой вариант

$$E[\xi(t)\,|\,\xi(0)] = \xi(0)$$ — опр-е мартингала

Теорема [2]



$t \le \tau \le T$

$E[\xi(\tau) \mid \xi(t)] = \xi(t)$

$e^{-\alpha t} S(t)$ - мартингал, где $S(t)$ - сумма акций

$\Rightarrow$ Т[1]:

$E[e^{-\alpha\tau} S(\tau) \mid S(0)] = S(0)$

$\Rightarrow$ Т[2]:

$E[e^{-\alpha\tau} S(\tau) \mid e^{-\alpha t} S(t)] = e^{-\alpha t} S(t) \quad \Big| \cdot e^{\alpha t}$ умножим

$$\boxed{E[e^{-\alpha(\tau - t)} S(\tau) \mid S(t)] = S(t)} \quad T < +\infty \quad (1)$$

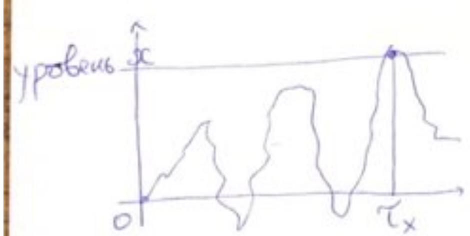
А что будет при $T = +\infty$

$$\boxed{E[e^{-\alpha(\tau - t)} S(\tau) \mid S(t)] \le S(t)} \quad (2)$$

$\mathbb{P}(\tau = +\infty) > 0$

$S(t) = S e^{\tilde{\alpha} t + \sigma z(t)}$

$x(t) = \tilde{\alpha} t + \sigma \cdot z(t)$ - броуновское движение



$x > 0$

τ_x - время первого достижения уровня x

(случ. вел. имеет плотность распр-я)

$G(x,t) = \mathbb{P}(\tau_x \le t)$

$g(x,t) = G'_t(x,t)$ - плотность распределение

$$\boxed{g(x,t) = \frac{x}{\sigma \cdot t^{3/2}} \varphi\left(\frac{x - \tilde{\alpha} t}{\sigma \sqrt{t}}\right)}$$

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ - плотность норм. распр-я

$\tilde{\alpha} \geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}\{\tau_x \leq \infty) = 1$

тренд

$\tilde{\alpha} < 0 \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_x \leq \infty) > 0$

Достаточное условие Новикова

Если $E[e^{\sigma^2 t^2/2}] < \infty$, то (2) $\Rightarrow \boxed{=}$

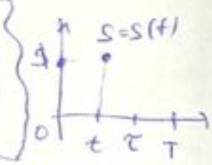
Д/З: Д-ть, что

$$E[e^{\sigma^2 \tau_x^2}] = \int_0^\infty e^{\frac{\sigma^2 t^2}{2}} g(x,t)\,dt = \infty$$

Опр. Стоимость американского опциона $S = S(t)$

$$\boxed{F(s,0) = \max_{0 \leq \tau \leq T} E[e^{-r\tau}(S(t) - K)^+ \mid S(0) = S]}$$

$$\boxed{F(s,t) = \max_{t \leq \tau \leq T} E[e^{-r(\tau - t)} \cdot (S(\tau) - K)^+ \mid S(t) = S]}$$



в любой момент времени

Мы будем расм-ть только для текущего

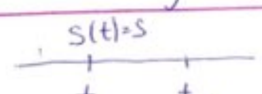
$f(s)$ $\quad \boxed{f(S(\tau))}$

$(S-K)^+ \quad (K-S)^+$

$$a^+ = \begin{cases} a, & a > 0 \\ 0, & a \leq 0 \end{cases}$$

Утв ① $f(S) \leq L \cdot S \Rightarrow \forall t \in [0,T] \quad F(s,t) \leq L \cdot S$

▶



$S(t_1) = S(t) \cdot e^{\tilde{\alpha}(t_1 - t) + \sigma(z(t_1) - z(t))}$

$\Rightarrow S(\tau) = S e^{\tilde{\alpha}(\tau - t) + \sigma(z(\tau) - z(t))}$

$F(s,t) = \max_{t \leq \tau \leq T} E[e^{-r(\tau - t)} f(S(\tau)) \mid S(t) = s] \leq \left\{ \begin{array}{l} r = \delta + \alpha \\ \delta \geq 0 \Rightarrow \end{array} \right\} r \geq \alpha.$

$\leq \max_{t \leq \tau \leq T} E[e^{-\alpha(\tau - t)} L \cdot S(\tau) \mid S(t) = S] \overset{(1)}{=} L \cdot S$

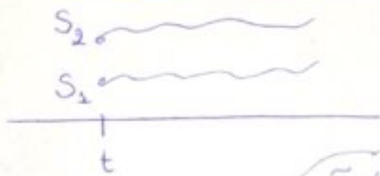
 ■

Утв②: (монотонность по S)

$f(S_1) \le f(S_2)$, если $S_1 < S_2$

$\Rightarrow \forall t \in [0,T] \quad F(S_1,t) \le F(S_2,t)$

▶



> они параллельны потому что

$$S_i(\tau) = S_i \cdot e^{\tilde{\alpha}(\tau - t) + \sigma(z(\tau) - z(t))}$$

$$S_1(\tau) < S_2(\tau)$$

$$F(S_1,t) = \max_{t \le \tau \le T} E\left[e^{-r(\tau-t)} f(S_1(\tau)) \,\middle|\, S_1(t) = S_1\right] \le$$ здесь воспольз. монотон.

$$\le \max_{t \le \tau \le T} E\left[e^{-r(\tau-t)} f(S_2(\tau)) \,\middle|\, S_2(t) = S_2\right] = F(S_2,t)$$

∎

Упр:

$(S-K)^+ \le LS$

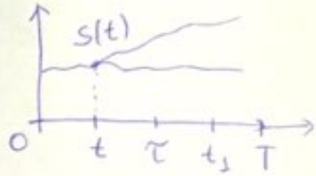
$(K-S)^+ \le LS$

При каких L имеет место?

25.09.19г.

Стоимость Амер. опциона

$$F(s,t) = \max_{t\le\tau\le T} E\left[e^{-r(\tau-t)} f(S(\tau)) \mid S(t)=s\right]$$



$\tau(z(\cdot))$ — момент остановки (зависит от траектории) также зависит от S (параметр)

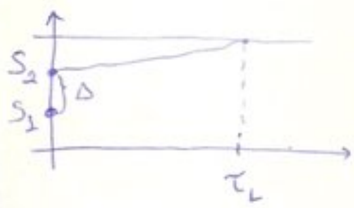
$t \le t_1 \le T$

$$S(t_1) = s\, e^{\tilde{\alpha}(t_1-t) + \sigma(z(t_1)-z(t))}$$

$$dS(t) = S(t)(\alpha\, dt + \sigma z(t))$$

$$\tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$$

$\{z(\cdot) \mid \tau(z(\cdot)) \le t_1\} \in \mathcal{F}_{t_1}$ - фильтрация



$\Delta = S_2 - S_1$

$S = S_1 \qquad \tau = \tau_L$

$S = S_2 \qquad \tau = \tau_{L+\Delta}$

Утв(3): $f(S)$ - ф-я платежа

$f(s)$ обладает одностор. усл. Липшица.

$s_1 < S_2 \qquad f(s_2) - f(s_1) \le L(S_2 - S_1)$

$\Rightarrow \forall t \in [0,T] \quad F(S_2,t) - F(S_1,t) \le L\cdot(S_2 - S_1)$

▶

$$E[e^{-\alpha(\tau-t)} s(\tau)] \overset{\forall \tau}{=} S \qquad (1) \quad T < +\infty$$
$$\le S \qquad (2) \quad T = +\infty$$

$$S_i(\tau) = S_i\, e^{\tilde{\alpha}(\tau-t) + \sigma(z(\tau)-z(t))}, \quad i = 1,2$$

$$S_1(\tau) < S_2(\tau)$$

По опр.:

$$F(S_2,t) - F(S_1,t) = \max_{t\le\tau\le T} E\left[e^{-r(\tau-t)} f(S_2(\tau))\right] - \max_{t\le\tau\le T} E\left[e^{-r(\tau-t)} f(S_1(\tau))\right] \le$$

$$\le \max_{t\le\tau\le T} E\left[e^{-r(\tau-t)}\left(f(S_2(\tau))-f(S_1(\tau))\right)\right] \le$$

$$\le \max_{t\le\tau\le T} E\left[e^{-r(\tau-t)} L\left(S_2(\tau)-S_1(\tau)\right)\right] \le \{r=\alpha+\delta,\ \delta\ge 0 \Rightarrow r\ge\alpha\} \le$$

$$\le L\cdot\max_{t\le\tau\le T} E\left[e^{-\alpha(\tau-t)}\left(S_2(\tau)-S_1(\tau)\right)\right] \overset{(1)}{=} L\cdot(S_2-S_1) \quad \blacksquare$$

<u>Упр. 1</u>

$f(S):\ S_1<S_2 \quad f(S_1)-f(S_2)\le L\cdot(S_2-S_1)$

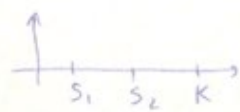
$\forall t\in[0,T]:\ F(S_1,t)-F(S_2,t)\le L\cdot(S_2-S_1)$

Давайте проверим выпол-ся ли $f(S)=(S-K)^+$

$S_1<S_2 \quad f(S_2)-f(S_1)\le L\cdot(S_2-S_1)$

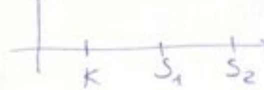
I. $K>S_2>S_1$

$f(S_2)-f(S_1)=0$



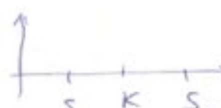
II. $K<S_1<S_2$

$f(S_2)-f(S_1)=S_2-S_1$, $L=1$



III. $S_1<K<S_2$

$f(S_2)-f(S_1)=S_2-K\le S_2-S_1$, $L=1$



<u>Упр. 2:</u>

$f(S)$ – выпукла, $S_1<S_2$, $\lambda\in(0,1)$

$$f(\underbrace{\lambda S_1+(1-\lambda)S_2}_{S^\lambda})\le\lambda f(S_1)+(1-\lambda)f(S_2)$$

$\Rightarrow F(S,t)$ – выпукла на S, $S_i(\tau)$, $i=1,2$

$S^\lambda(\tau)$.

Утв (4):

$$F(S,t) \geq \max[f(S), \underbrace{C(S,t)}_{\text{европейский опцион}}]$$

$\forall S>0 \quad \forall t \in [0,T]$

▶ $F(S,t) = \max\limits_{t \leq \tau \leq T} E[e^{-r(\tau-t)} f(S(\tau))]$

$S(t)=S \quad \tau=t \Rightarrow f(S)$

$\tau=T \Rightarrow C(S,t) = E[e^{-r(T-t)} f(S(T))]$ ■

Следствие: $f(S(T)) \geq 0 \Rightarrow C(S,t) \geq 0 \Rightarrow F(S,t) \geq 0$

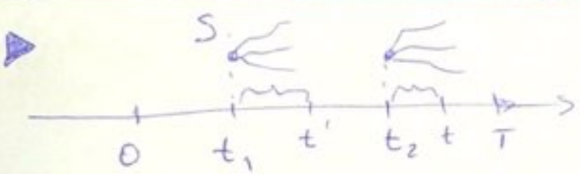
Утв (5): Монотонность по времени:

$0 \leq t_1 < t_2 \leq T$

$F(S,t_1) \geq F(S,t_2) \quad \forall S>0.$

(стоимость опциона убывает)

▶



$\boxed{t'-t_1 = t-t_2}$

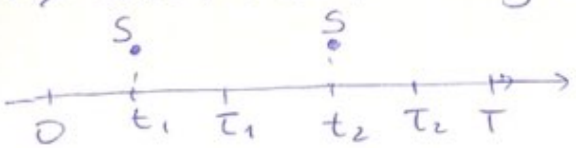
$S(t') = S e^{\tilde{\alpha}(t'-t_1) + \sigma(z(t')-z(t_1))}$

$S(t) = S \cdot e^{\tilde{\alpha}(t-t_2) + \sigma(z(t)-z(t_2))}$

$z(t')-z(t_1) \sim N(0, t'-t_1)$

$z(t)-z(t_2) \sim N(0, t-t_2)$

$\Rightarrow S(t') = S(t)$ — случайные величины одинаковы.



$\{\tau_1 = \tau_2 - (t_2 - t_1)\}$ — сдвинутая

$\Rightarrow S(\tau_2) = S(\tau_1)$

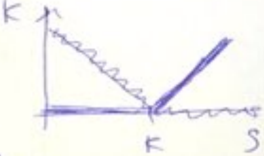
$F(S,t_2) = \max\limits_{t_2 \leq \tau_2 \leq T} E[e^{-r(\tau_2-t_2)} f(S(\tau_2))] =$

$= \max\limits_{t_2 \leq \tau_2 \leq T} E[e^{-r(\tau_1-t_1)} f(S(\tau_1))] \leq$

$$\leq \max_{t_1 \leq \tau_1 \leq T} E\left[e^{-r(\tau_1 - t_1)} f(S(\tau_1))\right] = F(S, t_1)$$

$$\Rightarrow F(S, t_2) \leq F(s, t_1)$$

Что вытекает из всех свойств?
(утв ① – ⑤)



1. $f(S) = (S-K)^+$, $(K-S)^+$ – выпукла
2. $F''_{SS}(s,t)$ – дважды дифф. (почти всюду)
3. $F_t(s,t)$ – дифф. почти всюду.

Множество немедленного исполнения опционов

τ^* – оптимальное реш правило предъявление опциона

$$\tau^* = \min\{t \mid f(S(t)) = F(S(t), t)\}$$

$\approx$ утв④ : $F(S(t), t) \geq f(S(t))$

$\mathcal{E} = \{(s,t) \mid f(s) = F(S,t)\}$ – мн-во немедлен. исполнения опциона.

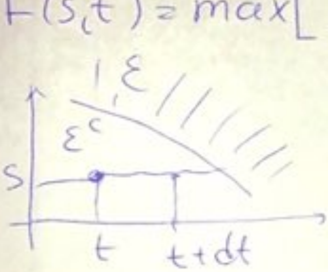
$\mathcal{E}^c = \{(s,t) \mid f(s) < F(s,t)\}$ – дополнение

$f(S(\tau)) > 0$

$$F(S,t) = \max E\left[e^{-r(\tau - t)} f(S(\tau))\right]$$ – риск нейтрал. инвестора

$(s,t) \in \mathcal{E}^c$

$$F(s,t) = \max\Big[\underset{S(t)=S}{f(s)},\ e^{-r\,dt} E\big[F(S(t+dt), t+dt)\big]\Big]$$ – дисконт. уравнение



т.к. $F(s,t) > f(s)$

$$\Rightarrow F(s,t) = e^{-r\,dt} E\big[F(S(t+dt), t+dt)\big] \quad \Big(\overset{\text{вычтем}}{-\,F(s,t)\,e^{-r\,dt}}\Big)$$

$$F(s,t)\left(1 - e^{-r\,dt}\right) = \underbrace{e^{-r\,dt}}_{e^{-r\,dt} \sim O(\ ) \approx 1}\ \underbrace{E\big[dF(s,t)\big]}_{\text{использ. формулу Ито}}$$

воспользуемся разложением

Формула Ито:

$$dF(s,t) = F_s' dS + F_t' dt + \frac{1}{2} F_{ss}'' (dS)^2$$

где $dS = S(t+\Delta t) - S$

$dS = S(\alpha dt + \sigma dz(t))$

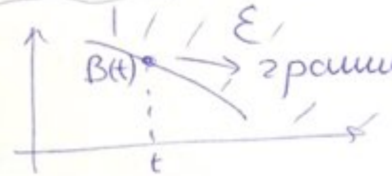
$(dS)^2 = S^2\sigma^2 (dz(t))^2 = S^2 \sigma^2 dt$

$(dz(t))^2 = dt$, т.к. $\operatorname{Var} dz(t) = dt$.

$$\Rightarrow F(s,t)\cdot r\cancel{dt} = E\Big[F_s' \cdot S(\alpha \cancel{dt} + \underbrace{\sigma dz(t)}_{\substack{\text{случ. вел} \\ E[\downarrow]=0}}) + F_t' \cancel{dt} + \frac{1}{2} F_{ss}'' \sigma^2 S^2 \cancel{dt}\Big]$$

$$\begin{cases} \boxed{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{ss}'' + \alpha S F_s' + F_t' - rF = 0} \\ F(S,t) = f(S) \\ F(B(t),t) = f(B(t)) \end{cases}$$

– уравнение Блэка-Шоулза



02.10.19г.

Мы доказали, что если f - выпукла, то $F(s,t)$ - вып.

$\mathcal{E} = \{(s,t) \mid F(s,t) = f(s)\}$

$\mathcal{E}^c = \{(s,t) \mid F(s,t) > f(s)\}$

$\Rightarrow (s,t) \in \mathcal{E}^c$

- $\boxed{\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \cdot F_s'' + \alpha s F_s' + F_t' - r \cdot F = 0}$ (с точки зрения покупателя)
- —"— $\underbrace{\alpha = r - \delta}_{\text{усл. риск-нейтр}}$ (с точки зр. продавца)

$\Downarrow$ Для того, чтобы продать опцион:

$$F(s(t),t) > f(s(t))$$

$$\overset{\shortparallel}{\Pi(s(t),t)} \text{ - портфель}$$

т.е. нам нужно обеспечить $F(s(t),t) = \Pi(s(t),t) \quad \forall t < T$

$F(s,T) = f(s)$ - стоимость портфеля в посл. момент времени

Δ-акции: $\Delta \cdot S$ → сумма акции; Δ ↓ кол-во акции

$F(s,t) - \Delta S > 0$ - сумма в банке

$F(s,t) - \Delta S < 0$ → не хватает денег ⇒ берем кредит на сумму: $\underline{\Delta S - F(s,t)}$

$\Rightarrow \boxed{\Pi(s,t) = F(s,t)}$

$t \qquad t + dt$

(*) $\boxed{dF = d\Pi}$ приращение стоимости = приращение портфеля $\Rightarrow F + dF = \Pi + d\Pi$

↳ явл-ся ключевым.

$$dF = F_s' ds + F_t' dt + \frac{1}{2} F_{ss}'' (ds)^2 = \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 F_{ss}'' dt$$

$$d\Pi = \underbrace{\Delta}_{\text{кол-во}} \cdot \underbrace{ds}_{\text{измен. акц.}} + \underbrace{\delta \Delta S dt}_{\text{дивиден.}} + \underbrace{r \cdot (F - \Delta S) dt}_{\text{процент от вклада (\%)}}, \quad ds \text{ - случ. величина}$$

$\Delta = F_S'$ => можно сократить ($F_S'dS + \ldots = \Delta dS + \ldots$)

=> $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F''_{SS} + (\underbrace{r-\delta}_{\alpha}) S F_S' + F_t' - rF = 0$

(*) : потому что рынок явл-ся безарбитражным!

(#) $\underbrace{dF - \Delta dS - \delta\Delta S dt}_{\text{детерми. величина}} = r(F-\Delta S)dt$ => (*) = (#)

$\Delta = F_S'$

Предположим, что (#) не вып, т.е.

$\boxed{dF - \Delta dS - \delta\Delta S dt > r(F-\Delta S)dt}$ I

Арбитраж: нет денег (пришел на рынок => провёл манипуляцию) => есть деньги

1) $F - \Delta S > 0$

2) $F - \Delta S < 0$

(1) => портфель, состоящ. из $\underbrace{1 \text{ опциона}}_{\text{в длинной позиции}}$ и $\underbrace{\Delta \text{ акции}}_{\text{в короткой позиции}}$

$t + dt$:

$\underbrace{F+dF}_{\text{стоим. портфеля}} \underbrace{- \underbrace{(S+dS)\Delta}_{\text{стоим. акции}} - \underbrace{\delta\Delta S dt}_{\text{дивид.}} - \underbrace{(F-\Delta S)}_{\text{банку}} - \underbrace{r(F-\Delta S)dt}_{(\%)}}_{\text{должен}} =$

$= dF - \Delta dS - \delta\Delta S dt - r(F-\Delta S)dt > 0$ (ушёл с деньгами :))

(2) => портфель: 1 опцион и Δ акции

$\Delta S - F$ = денеж. счет в банк

проходит время dt

$F + dF + (\Delta S - F) + r(\Delta S - F)dt - (S+dS)\Delta - \delta\Delta S dt =$

$= dF - \Delta dS - \delta\Delta S dt + r(\Delta S - F)dt \underbrace{> 0}_{\text{потому что}}$

$dF - \Delta dS - \delta\Delta S dt > r(F-\Delta S)dt$

Теперь предположим, что

- $\boxed{dF - \Delta dS - \delta \Delta S dt < r(F - \Delta S)dt}$ умн. на (-1) II

$\Delta dS + \delta \Delta S dt - dF > r(-F + \Delta S)dt$

1) $F - \Delta S > 0$
2) $F - \Delta S < 0$

Упр ① $\underbrace{1 \text{ опцион}}_{\text{в корот.}}$ и $\underbrace{\Delta \text{ акции}}_{\text{в длин.}}$ 1) у банка берем 2) банку возвращаем

(расписать для II)

$(S,t) \in \mathcal{E} \Rightarrow$ получаем вариационное неравенство:

$$\boxed{\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F''_{SS} + \alpha S F'_S + F'_t - rF \le 0}$$

$dF - \Delta dS - \delta \Delta S dt \, = \, r(F - \Delta S)dt$ есть арбитраж

. . . . $\le$ . . . . . . нет арбитража

Колл-опцион

До этого у нас были (общие) опционы ΔS

$\boxed{f(S) = (S-K)^+}$ – колл-опцион (покупаем опцион)

$\boxed{f(S) = (K-S)^+}$ – пут-опцион (продажа: заставляем кого-то купить :)

Как устроена $\mathcal{E}$ для колл-опциона?

Лемма ①

$0 < S_1 < S_2$. Если $(S_1,t) \in \mathcal{E}$, то $(S_2,t) \in \mathcal{E}$.

▶ $(S_1,t) \in \mathcal{E}$, $F(S_1,t) = S_1 - K > 0$

$F(S,t) > 0$, $t < T$

Из утв ③ следует, что

$F(S_2,t) - F(S_1,t) \le S_2 - S_1$, $L = 1$.

$F(S_2,t) \le F(S_1,t) + S_2 - S_1 = \cancel{S_1} - K + S_2 - \cancel{S_1} = S_2 - K \underset{\text{утв}④}{\le} F(S_2,t)$

$\Rightarrow F(S_2,t) = S_2 - K \Rightarrow (S_2,t)\in\mathcal{E}$. ∎

Упр.② $f(S) = (K-S)^+$

$0 < S_1 < S_2 \Rightarrow (S_2,t)\in\mathcal{E} \Rightarrow (S_1,t)\in\mathcal{E}$ д-ть аналог.

Определим границу для мн-ва $\mathcal{E}$ (колл-опцион)

$$\underset{\text{колл-опциона}}{B(t)} = \min\{S \mid (S,t)\in\mathcal{E}\} = \min\{\underbrace{S \mid \underset{\text{непр.}}{F(S,t)} = S-K}_{\text{мн-во замк.} \Rightarrow \text{минимум достигается}}\}$$

$$\underset{\text{пут-опцион}}{B(t)} = \max\{S \mid (S,t)\in\mathcal{E}\} = \max\{S \mid F(S,t) = K-S\}$$

(Нас интересует св-ва границы:)

Лемма②

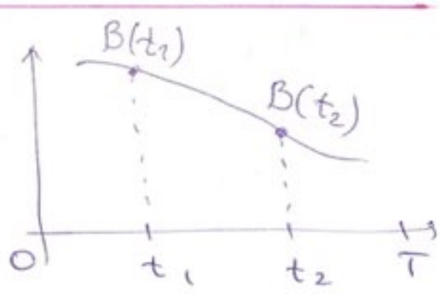
Колл-опцион: $B(t)$, $0<t_1<t_2<T \Rightarrow \boxed{B(t_1) \ge B(t_2)}$

▶ $(B(t_1),t_1)\in\mathcal{E} \Rightarrow$

$F(B(t_1),t_1) = B(t_1) - K \underset{\text{утв}⑤}{\ge}$

$\ge F(B(t_2),t_2) \underset{\text{утв.}④}{\ge}$

$\ge B(t_1) - K$



$\Rightarrow F(B(t_1),t_1) = B(t_1) - K \Rightarrow (B(t_1),t_2)\in\mathcal{E} \Rightarrow$ берем миним.

$\Rightarrow B(t_2) \le B(t_1)$

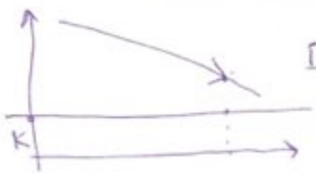
Ф-я $B(t)$ – непр., монот., убыв. ∎

Упр③

пут-опцион: $B(t)$, $0<t_1<t_2 \Rightarrow \boxed{B(t_1) \le B(t_2)}$

Лемма ③ (для колл-опциона)

$$\boxed{B(t) \geqslant \max\left[\frac{r\cdot K}{\delta}, K\right], \quad \forall t<T, \ \delta>0}$$



$\frac{rK}{\delta} > K$

$B(t) = K$

$\left[\begin{array}{l}\delta < r \\ \text{див. прои. (\%) получается разрыв}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\delta > r \\ \text{получ. непр}\end{array}\right.$

▶ $(s,t) \in \mathcal{E}, \ t<T$

$\Rightarrow s \geqslant \max\left[\frac{rK}{\delta}, K\right]$ нужно д-ть, $S > K$

$S = B(t) \qquad (B(t),t) \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow$ нужно д-ть $\ S \geqslant \frac{rK}{\delta}$

Воспол-ся вар. нер-вом:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F''_{SS} + \alpha S\cdot F'_S + F'_t - rF \leq 0$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\cdot 0 + \alpha\cdot S\cdot 1 - r(S-K) \leq 0$$

$$S\,(\underbrace{\alpha - r}_{-\delta}) \leq rK$$

$$S \geqslant \frac{rK}{\delta}$$

■

Упр ④

Для пут-опциона:

$$\boxed{B(t) \leq \min\left[\frac{rK}{\delta}, K\right]}$$

Лемма ④ (условие гладкости)

$\forall t<T \quad \boxed{F'_S(B(t),t) = 1} \leftarrow$ колл-опцион (without prove)

$\boxed{F'_S(B(t),t) = -1} \leftarrow$ пут опцион

Упр 2:

$f(S) = (K-S)^+$ — пут-опцион. $(S_2, t) \in \mathcal{E} \Rightarrow (S_1, t) \in \mathcal{E}$

▶ $(S_2, t) \in \mathcal{E}$ $\qquad F(S_2, t) = (K - S_2)^+$

$F(S_1, t) - F(S_2, t) \leq S_2 - S_1$, $L = 1$.

$F(S_1, t) \leq F(S_2, t) + S_2 - S_1 =$

$= K - \cancel{S_2} + \cancel{S_2} - S_1 = K - S_1 \leq F(S_1, t)$

$\Rightarrow F(S_1, t) = K - S_1 \Rightarrow (S_1, t) \in \mathcal{E}$. ✓

Упр. 3:

$B(t)$: $0 < t_1 < t_2 \Rightarrow B(t_1) \leq B(t_2)$

▶ $F(B(t_1), t_1) = K - B(t_1) \geqslant F(B(t_2), t_2) \geqslant K - B(t_1)$

$\Rightarrow (B(t_2), t_1) \in \mathcal{E}$ ✓

Упр 4:

$B(t) \leq \min\left[\frac{rk}{\delta}, K\right]$

▶ $(S, t) \in \mathcal{E}$, $t < T$

$\Rightarrow S \leq \min\left[\frac{rk}{\delta}, K\right]$

$S = B(t)$, $(B(t), t) \in \mathcal{E}$.

$\Rightarrow S \leq \frac{rk}{\delta}$

$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F''_{SS} + \alpha S \cdot F_S' + F_t' - rF$

Упр 1

$$dF - \Delta dS - \delta \Delta S dt > r(F - \Delta S)dt.$$

1) $F - \Delta S > 0$
2) $F - \Delta S < 0$

---

(1) => портфель: $\underbrace{1 \text{ опцион}}_{\text{в корот.}}$ и $\underbrace{\Delta \text{ акции}}_{\text{в длин.}}$

$t + dt$:

$$F + dF - (S + dS)\Delta - \delta \Delta S dt - (F - \Delta S) - r(F - \Delta S) =$$

$$= dF - \Delta dS - \delta \Delta S - r(F - \Delta S)dt > 0.$$

09.10.19 г.

Упр.1

$\Delta dS + \delta S \Delta dt - dF > r(\Delta S - F)dt$

1) $\Delta S - F > 0$ Арбитраж:

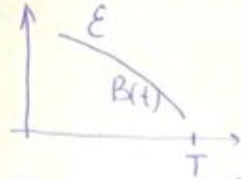
$(S+dS)\Delta + \delta \Delta S dt - (F+dF) - (\Delta S - F) - r(\Delta S - F) > 0$

2) $\Delta S - F \not< 0$ (аналогично

Утв(6) (колл-опцион)

Если $\delta = 0$, то $F(S,t) = C(S,t)$, $t = T$ $F(S,T) = C(S,T) = (S-K)^+$

I. Использ. вар нер-во:



нужно док-ть: $B(t) = +\infty$, $\mathcal{E} \neq \varnothing$

От противного: $B(t) < +\infty$

$S > B(t)$, $(S,t) \in \mathcal{E}$

$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F''_{SS} + \alpha S F'_S + F'_t - rF \leq 0$, $F(S,t) = S - K$, $F'_S = 1$.

$r = \alpha + \delta = \alpha$

$rS - r(S-K) \leq 0 \Rightarrow rK \leq 0$, $r > 0, K > 0$ противор.

II. Воспольз. формулой Блэка-Шоулза

(1) $C(S,t) = Se^{-\delta(T-t)}\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$

$d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (\tilde{\alpha} + \sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, Φ - ф-я распр-я

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

$\tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$

Нужно д-ть: $C'_t(S,t) < 0$ $\forall t < T$

$F(S,t) \geq C(S,t) > C(S,T) = (S-K)^+$

$F(S,t) > (S-K)^+ \Rightarrow (S,t) \in \mathcal{E}^c$

опцион исполнять не надо

$\delta = 0$ в (1) $\quad$ φ - плотность распр.

$$C'_t = \underline{S \cdot \varphi(d_1)\, d'_{1_t}} - Kre^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - \underline{Ke^{-r(T-t)}\varphi(d_2)d'_{2_t}}$$

Давайте док-м рав-во:

$$S\varphi(d_1) = Ke^{-r(T-t)}\varphi(d_2)$$

$$\frac{\varphi(d_1)}{\varphi(d_2)} = e^{-\frac{1}{2}(d_1^2 - d_2^2)} = e^{-(d_1-d_2)\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)} = \left\{ d_1 - d_2 = \sigma\sqrt{T-t} \right\} =$$

$$= e^{-\cancel{\sigma\sqrt{T-t}} \cdot \frac{\ln(S/K) + (\tilde{\alpha} + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\cancel{\sigma\sqrt{T-t}}}} = e^{-\ln(S/K)} \cdot e^{-r(T-t)} =$$

$$= \frac{K}{S} e^{-r(T-t)}$$

$$\Rightarrow C'_t = S\varphi(d_1)(d'_{1_t} - d'_{2_t}) - Kre^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

$$d'_{1_t} - d'_{2_t} = (d_1 - d_2)'_t = \left(\sigma\sqrt{T-t}\right)'_t = -\frac{\sigma}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{T-t}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d'_{1_t} - d'_{2_t} < 0 \Rightarrow \underline{C'_t \le 0}$$

∎

Для пут-опциона $\delta = 0 \Rightarrow \underline{F(S,t) = C(S,t)}$
неверно.

$$-(K-S)^+ + (S-K)^+ = S - K$$

$S = S(T)$, еще умн. на $e^{\cdots}$ и возьмем E.

$$E\left[e^{-r(T-t)}(S(T)-K)^+\right] - E\left[e^{-r(T-t)}(K - S(T))^+\right] =$$

$$= e^{-r(T-t)} E[S(T) - K]$$

$$C(S,t) - P(S,t) = e^{-r(T-t)} E[S(T)-K] \ominus$$

$e^{-\alpha t}S(t) = e^{-rt}S(t)$ - мартингал

$r = \alpha + \delta$, $\delta = 0$.

$$E\left[e^{-rT}S(T)\right] = e^{-rt}S$$

$$E\left[e^{-r(T-t)}S(T)\right] = S$$

$\Leftrightarrow S - Ke^{-r(T-t)}$

$$\underbrace{P(s,t)}_{\text{пут-опцион европейского типа}} = \underbrace{C(s,t)}_{\text{убывает}} - S + \underbrace{Ke^{-r(T-t)}}_{\text{возрастает}}$$

В неком. случаях $P(s,t)$ может оказаться полож.

Оценка бесконечного колл-опциона

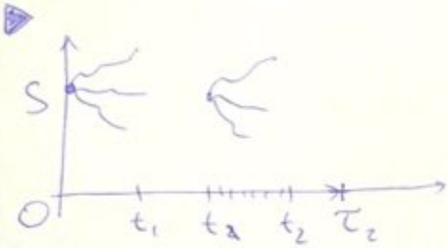
$T = +\infty$

Лемма 5:

$T=+\infty$ $F(s,t) = F(s,0)$ $\forall t \geq 0$

(т.е. стоимость амер опциона от времени не зависит.)

▶



$t_2 \geq t$

$t_1 = t_2 - t$

$$\underbrace{z(t_2) - z(t)}_{\shortparallel} \sim N(0, t_2 - t)$$

$$\underbrace{z(t_2 - t)}_{\shortparallel} \sim N(0, t_2 - t)$$

$$z(t_1) \sim N(0, t_1)$$

одинаково распр-ы.

Момент остановки $t \leq \tau_2 \leq +\infty$

$\tau_1 = \tau_2 - t$ одинаково распр.

$\Rightarrow z(t_2) - z(t)$ / \ $z(\tau_1)$

$$\Rightarrow F(s,t) = \max_{t \leq \tau_2 \leq +\infty} E\left[e^{-r(\tau_2 - t)}(S(\tau_2) - K)^+\right] =$$

$$= \max_{t \leq \tau_2 \leq +\infty} E\left[e^{-r\underbrace{(\tau_2 - t)}_{\tau_1}}\left(Se^{\tilde{\alpha}(\tau_2 - t) + \sigma\underbrace{(z(\tau_2) - z(t))}_{z(\tau_1)}} - K\right)^+\right] =$$

$$= \max E\left[e^{-r\tau_1}\left(\underbrace{Se^{\tilde{\alpha}\tau_1 + \sigma(z(\tau_1))}}_{S(\tau_1)} - K\right)^+\right] = F(s,0)$$

$\Rightarrow F(s) = F(s,0)$

■

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F''(S) + \alpha S F'(S) - r F(S) = 0$$

Найти общее решение однородн. уравн.

$$F(S) = S^{\beta}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \beta(\beta-1) S^{\beta-2} + \alpha S \beta S^{\beta-1} - r S^{\beta} = 0$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta-1) + \alpha\beta - r = 0$$

$$\beta^2\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right) + \beta\left(\underbrace{\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2}_{\tilde{\alpha}}\right) - r = 0$$

$$\beta_{1,2} = \frac{-\tilde{\alpha} \pm \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2}, \quad \underline{\beta_2 < 0}$$

Покажем, что $\beta_1 > 1$

$$\frac{-\tilde{\alpha} + \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 2\sigma^2 r}}{\sigma^2} > 1$$

$$\sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 2r\sigma^2} > \sigma^2 + \tilde{\alpha}$$

$$\cancel{\tilde{\alpha}^2} + 2r\sigma^2 > \sigma^4 + 2\sigma^2\tilde{\alpha} + \cancel{\tilde{\alpha}^2}$$

$$2r\sigma^2 > \sigma^4 + 2\sigma^2\tilde{\alpha}$$

$$2r\sigma^2 > \sigma^4 + 2\sigma^2\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$2r\sigma^2 > \cancel{\sigma^4} + 2\sigma^2\alpha - \cancel{\sigma^4}$$

$r > \alpha$ – это верно $\Rightarrow$ $\underline{\beta_1 > 1}$

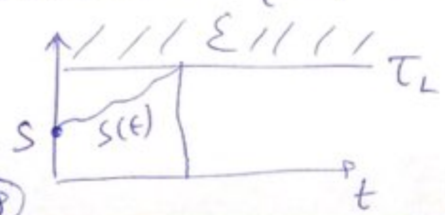
$$\Rightarrow F(S) = A S^{\beta_1} + \hat{A} S^{\beta_2}$$

$\boxed{\hat{A} = 0}$, $\underline{\hat{A} \neq 0} \Rightarrow S \to 0 \ \hat{A} S^{\beta_2} \to \pm\infty$ невозм. $\Rightarrow \hat{A} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{F(S) = A S^{\beta_1}}$$

$$\mathcal{E} = \{(S,t) \mid F(S) = S - K\}$$

$$B(t) = \min\{S \mid F(S) = S - K\} \equiv S^*$$



Нужно найти

$\underline{A \text{ и } S^*}$.

$$\begin{cases} F(S^*) = S^* - K & (1) \\ F'(S^*) = 1 & (2) \end{cases} \Leftarrow F'_S(B(t),t) = 1.$$

$$\begin{cases} A(S^*)^{\beta_1} = S^* - K \\ A\beta_1 (S^*)^{\beta_1 - 1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(S^*)^{\beta_1} = S^* - K \\ A\beta_1 (S^*)^{\beta_1} = S^* \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{S^* = \frac{K}{1 - 1/\beta_1} = \frac{K\beta_1}{\beta_1 - 1}}$$

Теорема:
$T = +\infty$, τ_{S^*} – порог. решающ. пр-во. $S^* = \frac{K\beta_1}{\beta_1 - 1}$

$$\Rightarrow \boxed{F(S) = \left(\frac{S}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \Big/ \left(\frac{K}{\beta_1 - 1}\right)^{\beta_1 - 1}}$$

▶ $$\begin{cases} A(S^*)^{\beta_1} = S^* - K & (1) \\ A\beta_1 (S^*)^{\beta_1} = S^* & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \quad A = \frac{1}{(S^*)^{\beta_1 - 1}\beta_1}$$

$$\Rightarrow F(S) = AS^{\beta_1} = \frac{S^{\beta_1}}{(S^*)^{\beta_1 - 1} \cdot \beta_1} = \left(\frac{S}{\beta_1}\right)^{\beta_1} \Big/ \left(\frac{K}{\beta_1 - 1}\right)^{\beta_1 - 1}$$

Рассм-м пут-опцион: $T = \infty$, $(K-S)^+ \le K$.

$F(S) = AS^{\beta_1} + \hat{A} S^{\beta_2}$

$A = 0$, т.к. $\beta_1 > 1$, $S^{\beta_1} \to \infty$

$\Rightarrow F(S) = \hat{A} S^{\beta_2}$

$$\begin{cases} F(S^*) = K - S^* \\ F'(S^*) = -1. \end{cases}$$

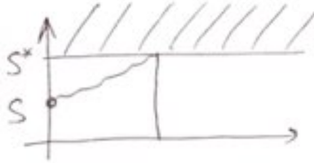
$$\begin{cases} \hat{A}(S^*)^{\beta_2} = K - S^* & \Rightarrow S^* = \dfrac{K\beta_2}{\beta_2 - 1} = \dfrac{K(-\beta_2)}{1-\beta_2} \\ \hat{A}\beta_2 (S^*)^{\beta_2 - 1} = -1 & \Rightarrow \hat{A} = \dfrac{1}{-\beta_2 (S^*)^{\beta_2 - 1}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(S) = \hat{A} S^{\beta_2} = \frac{S^{\beta_2}}{-\beta_2 (S^*)^{\beta_2 - 1}} = \frac{S^{\beta_2}}{-\beta_2 \left(\frac{K(-\beta_2)}{1-\beta_2}\right)^{\beta_2 - 1}} =$$

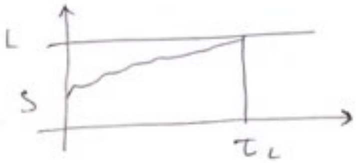
$$= \left(\frac{S}{-\beta_2}\right)^{\beta_2} \Big/ \left(\frac{K}{1-\beta_2}\right)^{\beta_2 - 1}$$

16.10.19г.

Бесконечный колл-опцион.



$\mathcal{E}$ — оптимальное



$$F(S) = \max_{L \geqslant \max[K,S]} E\left[\underbrace{(L-K)e^{-r\tau_L}}_{a(L)}\right]$$

$$a(L) = (L-K)E\left[e^{-r\tau_L}\right]$$

Наша задача найти мат. ожид.

Стоимость акции: $S(t) = Se^{\tilde{\alpha}t + \sigma z(t)} = Se^{\tilde{\alpha}t + \sigma\sqrt{t}X} = L$.

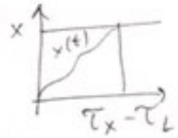
$$\sqrt{t}\left(\frac{z(t)}{\sqrt{t}}\right) \sim N(0,t)$$

$$\frac{z(t)}{\sqrt{t}} = \lambda \sim N(0,1)$$

$$x(t) = \tilde{\alpha}t + \sigma z(t)$$

$$x(t) = \ln\left(\frac{S}{K}\right) = X > 0.$$

Таким образом, мы получили экв. задачу:



$$G(x,t) = \mathbb{P}(\tau_x \leq t) = \Phi\left(\frac{-x+\tilde{\alpha}t}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2\tilde{\alpha}x}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{-x-\tilde{\alpha}t}{\sigma\sqrt{t}}\right) = G(x,t,\tilde{\alpha})$$

$$G'_t = g(x,t) = \frac{x}{\sigma t^{3/2}}\varphi\left(\frac{-x+\tilde{\alpha}t}{\sigma\sqrt{t}}\right) = \boxed{Y_{\text{пр } 1}} = g(x,t,\tilde{\alpha})$$

$\tilde{\alpha}$ — тренд

$$x(t) = \tilde{\alpha}t + \sigma z(t)$$

$$\int_0^T g(x,t,\tilde{\alpha})\,dt = G(x,T,\tilde{\alpha}) - \underbrace{G(x,0,\tilde{\alpha})}_{=0}$$

$$E\left[e^{-r\tau_x}\right] = \int_0^\infty e^{-rt}g(x,t,\tilde{\alpha})\,dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-rt}g(x,t,\tilde{\alpha})\,dt$$

$$\begin{cases} -rt - \frac{1}{2}\left(\frac{-x+\tilde{\alpha}t}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - 2\tilde{\alpha}tx + (\tilde{\alpha})^2t^2 + 2r\sigma^2t^2}{\sigma^2 t}\right) \boxminus \\ \Rightarrow \xi = \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 2r\sigma^2}, \quad \beta_{1,2} = \frac{-\tilde{\alpha} \pm \xi}{\sigma^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi t}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2 + \frac{\tilde{\alpha}}{\sigma^2} - \frac{\xi x}{\sigma^2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\xi t}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2 - \beta_1 x$$

$$\Rightarrow \int_0^T e^{-rt} g(x,t,\tilde{\alpha})\,dt = e^{-\beta_1 x}\int_0^T g(x,t,\xi)\,dt \ \ominus$$

$$g(x,t,\xi) = \frac{x}{\sigma t^{3/2}}\,\varphi\left(\frac{x-\xi t}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

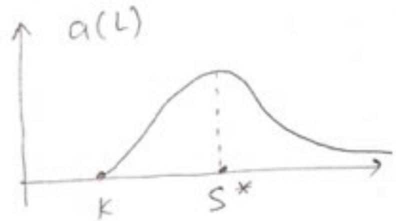
$$\ominus\ e^{-\beta_1 x} G(x,T,\xi) = e^{-\beta_1 x}\left[\Phi\left(\frac{-x+\xi T}{\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{2\xi x}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{-x-\xi T}{\sigma\sqrt{t}}\right)\right] \triangleq$$

$$-\beta_1 + \frac{2\xi}{\sigma^2} = \frac{\tilde{\alpha}-\xi}{\sigma^2} + \frac{2\xi}{\sigma^2} = \frac{\tilde{\alpha}+\xi}{\sigma^2} = -\beta_2$$

$$\triangleq e^{-\beta_1 x}\underbrace{\Phi\left(\frac{-x+\xi T}{\sigma\sqrt{T}}\right)}_{\to 1 \text{ при } T\to\infty} + e^{-\beta_2 x}\underbrace{\Phi\left(\frac{-x-\xi T}{\sigma\sqrt{T}}\right)}_{\to 0 \text{ при } T\to\infty,\ \xi>0}$$

$$\Rightarrow \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-rt} g(x,t,\tilde{\alpha})\,dt = e^{-\beta_1 x} = \left(S/L\right)^{\beta_1}$$

$$\Rightarrow \boxed{a(L) = (L-K)\left(\frac{S}{L}\right)^{\beta_1}}$$



Осталось найти $\max\limits_{L\geq\max[K,S]} a(L)$

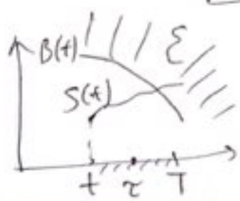
$$a'(L) = \left(\frac{S}{L}\right)^{\beta_1} - (L-K)\beta_1\cdot\left(\frac{S}{L}\right)^{\beta_1}\frac{1}{L} = 0$$

$$1 - \frac{L-K}{L}\beta_1 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{L = \frac{K\beta_1}{\beta_1-1} = S^*}$$

Второй способ получения формулы.

Следствие:

$T < +\infty \Rightarrow \boxed{B(t) \leq S^*}$



$$F(s,t) \le F(s)$$

$$F(s) = \max_{t \le \tau \le T} E\left[e^{-r\tau}(S(\tau)-K)^+\right]$$

$$F(s,t,T_1) < F(s,t,T_2) \quad T_1 < T_2$$

$$F(s^*) = S^* - K \geqslant F(s^*,t) \underset{\text{утв}(4)}{\geqslant} S^* - K$$

$$\Rightarrow F(s^*,t) = s^* - K \Rightarrow (s^*,t) \in \mathcal{E}$$

$$B(t) = \min\{S \mid (s,t) \in \mathcal{E}\} \le S^*$$

Упр② Для пут-опциона $B(t) \geqslant S^*$

$$S^*_{\text{колл}} = \frac{K\beta_1}{\beta_1 - 1}\ ; \quad S^*_{\text{пут}} = \frac{K(-\beta_2)}{1-\beta_1}$$

Что если дивиденда $\to 0$?

$$\beta_1 = \frac{-\tilde{\alpha} + \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}$$

$$r = \alpha + \delta, \quad \tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\delta \to 0 \Rightarrow \alpha \to r$$

$$\beta_1 = \frac{-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sqrt{\left(r - \frac{\sigma}{2}\right)^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} = \frac{-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sqrt{r^2 - r\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{4} + 2r\sigma^2}}{\sigma^2} =$$

$$= \frac{-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma^2} = 1 \qquad \text{т.е. } \underline{\delta = 0}$$

$$\beta_2 = -\frac{2r}{\sigma^2}$$

Интегральная формула для стоимости амер. опциона (колл)

$T < +\infty$

$F(s,0) = C(s,0) + \text{интеграл} \underset{\text{зав.} \nearrow}{(B(t))}$

1) $(s,t) \in \mathcal{E}^c$, $t < T$

$\frac{1}{2} \sigma^2 s^2 F''_{ss} + \alpha s F_s' + F_t' - rF = 0$

$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \alpha s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial t} - r$

$\mathcal{D} \cdot F(s,t) = 0$, если $(s,t) \in \mathcal{E}^c$

2) $(s,t) \in \mathcal{E}$, $F(s,t) = s - K$

$\mathcal{D}F = \alpha s - r(s-k) = rk + s(\alpha - r) = rk - \delta s$

$\mathcal{D}\{F(s,t) = (rk - \delta s) \boxed{1_{\{s \geqslant B(t)\}}}$ ← индикатор, т.е $s \geqslant B(t)$

Теперь выведим интегр. форм.

$s(t)$: $ds(t) = s(t)(\alpha dt + \sigma dz(t))$, $s(0) = s$

$d\left[e^{-rt} E(F(s(t),t))\right] = re^{-rt} F dt + e^{-rt} dF =$

$= e^{-rt}\left(-rF dt + F_s' ds + F_t' dt + \frac{1}{2} F_{ss}''(ds)^2\right) =$

$= e^{-rt}\left(-rF dt + F_s' \cdot s\,(\alpha t + \sigma dz(t))\right) + F_t' dt + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 F_{ss}'' dt\Big) =$

$= e^{-rt}\left(\mathcal{D}F dt + F_s' s \sigma dz(t)\right)$, $S(t) = s$

$\Rightarrow d\left[e^{-rt} E\left(F(s(t),t)\right)\right] = e^{-rt} E\left((rk - \delta s(t)) 1_{\{s \geqslant B(t)\}}\right) \boxed{=}$

$$\left[\begin{array}{l} s(t) = se^{\tilde{\alpha} t + \sigma\sqrt{t} X} \geqslant B(t) \Rightarrow X \geqslant \dfrac{\ln\left(\frac{B(t)}{s}\right) - \tilde{\alpha} t}{\sigma\sqrt{t}} = -d_2 \\ \left\{\begin{array}{l} d_2 = \dfrac{\ln\left(s/B(t)\right) + \tilde{\alpha} t}{\sigma\sqrt{t}} \qquad X \sim \mathcal{N}(0,1) \\ d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{t} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$\boxed{=}\; e^{-rt} \int\limits_{-d_2}^{+\infty} (rk - \delta s e^{\tilde{\alpha} t + \sigma\sqrt{t} X})\, \varphi(x)\, dx = I_1 - I_2$

$$I_1 = e^{-rt} 2k \int_{-d_2} \varphi(x)\, dx = e^{-rt} 2k\, \Phi(d_2)$$

$$\int_{-d_2} \varphi(x)\, dx = 1 - \Phi(-d_2) = \Phi(d_2)$$

$$-rt + \tilde{\alpha} t + \sigma\sqrt{t}\, X - \frac{X^2}{2} = -rt + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \frac{(x - \sigma\sqrt{t})^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} t =$$

здесь x (икс малое)

$$= -\delta t - \frac{(x - \sigma\sqrt{t})^2}{2}$$

$$-d_1 \to -d_2 - \sigma\sqrt{t} = -d_1$$

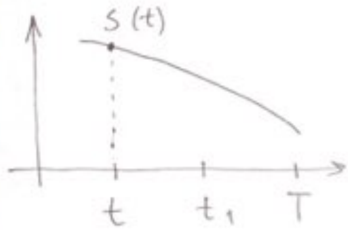
$$I_2 = \delta s e^{-\delta t} \int_{-d_1}^{\infty} \varphi(y)\, dy = \delta s e^{-\delta t} \Phi(d_1)$$

$$\Rightarrow \boxed{d\left[e^{-rt} E\left[F(s(t), t)\right]\right] = I_1 - I_2 = e^{-rt} r k\, \Phi(d_2) - e^{-\delta t} s\, \Phi(d_1)}$$

23.10.19 г.

Упр (1). Интегр. форма амер. пут-опциона: (K-S)

$$F(S,t) = C(S,t) + \int_t^T \left[\delta S e^{-\delta(t_1-t)} \varphi\left(d_1\left(\frac{S}{B(t_1)}, t_1-t\right)\right) - \right.$$
$$\left. - rKe^{-r(t_1-t)} \varphi\left(d_2\left(\frac{S}{B(t_1)}, t_1-t\right)\right)\right] dt_1$$



$$S = B(t)$$

$$F(B(t),t) = B(t) - K = C(B(t),t) + \int_t^T \left[\delta B(t) e^{-\delta(t_1-t)} \varphi\left(d_1\left(\frac{B(t)}{B(t_1)}, t_1-t\right)\right) - \right.$$
$$\left. - rKe^{-r(t_1-t)} \varphi\left(d_2\left(\frac{B(t)}{B(t_1)}, t_1-t\right)\right)\right] dt_1$$

$T \to \infty$

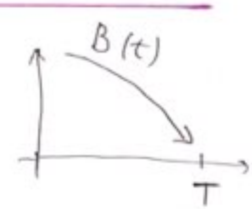
$$F(S,t) = F(S,t,T) = \underbrace{C(S,t,T)}_{\searrow 0 \text{ при } T\to\infty} + \int_t^T \dots$$

$$\Rightarrow F(S,t,\infty) = F(S) = \int_0^\infty \left[\delta S e^{-\delta(t_1-t)} \varphi\left(d_1\left(\frac{S}{S^*}, t\right)\right) - \right.$$
$$\left. - rKe^{-r(t_1-t)} \varphi\left(d_2\left(\frac{S}{S^*}, t\right)\right)\right] dt$$

$$B(t) \geqslant \max\left[\frac{rK}{\delta}, K\right] = \frac{rK}{\delta}, \quad 0 < \delta < r$$

Следствие 1:

Интегр. формул: $\boxed{\lim_{t\to T-} B(t) = \frac{rK}{\delta}}$



▶ Пусть $\lim_{t\to T-} B(t) > \frac{rK}{\delta}$

$$S:\ \frac{rK}{\delta} < S < \lim B(t) \leq B(t)$$

(36) $$d_1\left(\frac{S}{B(t_1)}, t_1-t\right) = \frac{\ln(S/B(t_1)) + (\tilde{\alpha} + \sigma^2)(t_1-t)}{\sigma\sqrt{t_1-t}} \to -\infty$$

$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x) < \frac{\varphi(x)}{x} \to 0, \quad x \to \infty.$

$\Rightarrow F(s,t) = C(s,t) + \bar{o}(T-t)$

Нам надо получить аппроксимацию $C(s,t)$ при $t \to T-$

Воспользуемся форм. Блэка-Шоулса:

$$C(s,t) = se^{-\delta(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(s/k) + (\tilde{\alpha}+\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) -$$

$$- ke^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(s/k) + (\tilde{\alpha}+\sigma^2)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) =$$

$$= s\left(1-\delta(T-t)\right) 1 - k\left(1 - r(T-t)\right) + \bar{o}(T-t) =$$

$$= (s-k) + (rk - s\delta)(T-t) + \bar{o}(T-t)$$

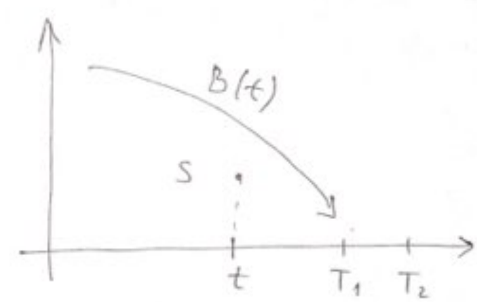
$$\Rightarrow F(s,t) = C(s,t) + o(T-t) = (s-k) + (\underbrace{rk-\delta s}_{<0})(T-t) + o(T-t) \le$$

$\le s - k \le F(s,t)$

↳ противоречие

■

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{t \to T-} B(t) = \frac{rk}{\delta}} \quad ✓$$



Лемма 6:

$t < T_1 < T_2 : \boxed{B(t,T_1) \le B(t,T_2)}$

▶ $F(s,t,T_1) \le F(s,t,T_2)$

Если $(s,t) \in \mathcal{E}(T_2)$, то $(s,t) \in \mathcal{E}(T_1)$

$$\begin{cases} (s,t) \in \mathcal{E}(T_2) \Rightarrow F(s,t,T_2) = s-k \ge F(s,t,T_1) \ge s-k \\ \Rightarrow F(s,t,T_1) = s-k \Rightarrow (s,t) \in \mathcal{E}(T_1) \end{cases}$$

$$B(t,T_2) = \min\{s \mid (s,t) \in \mathcal{E}(T_2)\} \ge \min\{s \mid (s,t) \in \mathcal{E}(T_1)\} = B(t,T_1)$$

t - фикс., $B(t,T)$ не убыв. по T.

■

Следствие 2:

$$\lim_{T\to\infty} B(t,T) = S^* = \frac{K\beta_1}{\beta_1 - 1}$$

▶ От противного:

$$\lim_{T\to\infty} B(t,T) = \tilde{S} < S^*$$

$$\boxed{S > S^* > \tilde{S} \geqslant B(t)} \qquad B(t,T) = B(0, T-t) \to S^*$$

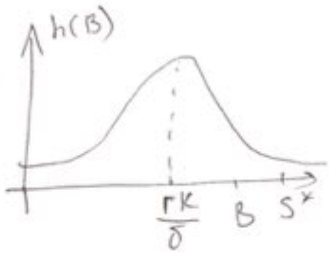
$$\lim_{T\to\infty} B(0,T) = S^*$$

$$F(S,0) = S - K = C(S,0,T) + \int_0^T \Big[\delta S e^{-\delta t}\Phi\Big(d_1\Big(\frac{S}{B(t,T)}, t\Big)\Big) -$$

$$- rKe^{-rt}\Phi\Big(d_2\Big(\frac{S}{B(t,T)}, t\Big)\Big)\Big]dt$$

монотонна по B.

$$h(B) = \delta S e^{-\delta t}\Phi\Big(d_1\Big(\frac{S}{B}, t\Big)\Big) - rKe^{-rt}\Phi\Big(d_2\Big(\frac{S}{B}, t\Big)\Big)$$



$$d_1\Big(\frac{S}{B}, t\Big) = \frac{\ln(S/B) + (\tilde{a} + \sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}$$

$$d'_{1_B} = -\frac{1}{B\sigma\sqrt{t}} = d'_{2_B}$$

$$h'_B = \delta S e^{-\delta t}\varphi\Big(d_1\Big(\frac{S}{B}, t\Big)\Big)\Big(-\frac{1}{B\sigma\sqrt{t}}\Big) - rKe^{-rt}\varphi\Big(d_2\Big(\frac{S}{B}, t\Big)\Big)\cdot\Big(-\frac{1}{B\sigma\sqrt{t}}\Big)$$

$$Se^{-\delta t}\varphi\Big(d_1\Big(\frac{S}{B}, t\Big)\Big) = Be^{-rt}\varphi\Big(d_2\Big(\frac{S}{B}, t\Big)\Big)$$

$$h'_B = \delta B e^{-rt}\varphi\Big(d_2\Big(\frac{S}{B}, t\Big)\Big) - rKe^{-rt}\varphi\Big(d_2\Big(\frac{S}{B}, t\Big)\Big) =$$

$$= (\delta B - rK)e^{-rt}\varphi\Big(d_2\Big(\frac{S}{B}, t\Big)\Big) = 0$$

$$\boxed{B = \frac{rK}{\delta}} \qquad B \to \infty \quad \Phi \to 0$$

$$S - K = \int_0^\infty \Big[\delta S e^{-\delta t}\Phi\Big(d_1\Big(\frac{S}{\tilde{S}}, t\Big)\Big) - rKe^{-rt}\Phi\Big(d_2\Big(\frac{S}{\tilde{S}}, t\Big)\Big)\Big]dt >$$

$$> \underbrace{\int_0^\infty \ldots \; (\tilde{S} = S^*) \ldots = S - K}_{\text{формула противоречие}}$$

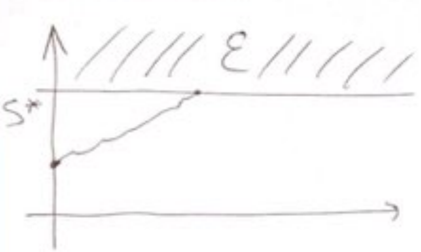
Почему верна формула из [illegible] ?

1. Надо проинтегр. по частям
2. Воспольз. форм.

$$a, b > 0: \quad \int_0^\infty \frac{1}{t^{3/2}} \varphi\left(\frac{a - bt}{\sqrt{t}}\right) dt = \frac{1}{a}$$

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^{1/2}} \varphi\left(\frac{a - bt}{\sqrt{t}}\right) dt = \frac{1}{b}$$

30.10.14 г.



$$S^* = \frac{k\beta_1}{\beta_1 - 1}$$

$$\beta_{1,2} = \frac{-\tilde{\alpha} \pm \xi}{\sigma^2}, \quad \text{где } \xi = \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 2r\sigma^2}$$

Колл:

$$F(s) = \int_0^\infty \Big[s\delta e^{-\delta t} \varphi\Big(\underbrace{\frac{\ln\left(\frac{s}{s^*}\right) + (\tilde{\alpha}+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}}}_{d_1} \Big) - kre^{-rt}\varphi\Big(\underbrace{\frac{\ln\left(\frac{s}{s^*}\right) + \tilde{\alpha}t}{\sigma\sqrt{t}}}_{d_2} \Big) \Big] dt =$$

$\{s > s^*\}$ $\quad \Phi(\infty) = 0$

$$= -e^{-\delta t} s\,\Phi(d_1)\Big|_0^\infty + e^{-rt} k\,\Phi(d_2)\Big|_0^\infty +$$

$$+ \int_0^\infty \left[s e^{-\delta t} \varphi(d_1) d'_{1_t} - k e^{-rt} \varphi(d_2) d'_{2_t} \right] dt = s - k +$$

$$+ \int_0^\infty \left[s e^{-\delta t} \varphi(d_1) d'_{1_t} - k e^{-rt} \varphi(d_2) d'_{2_t} \right] dt =$$

$$\boxed{s e^{-\delta t} \varphi(d_1) = s^* e^{-rt} \varphi(d_2)}$$

$$= s - k + \int_0^\infty e^{-rt} \varphi(d_2) \left[s^* d'_{1_t} - k d'_{2_t} \right] dt$$

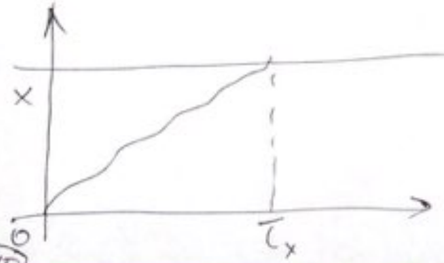
$$d'_{1_t} = \left(\frac{\ln\left(\frac{s}{s^*}\right) + (\tilde{\alpha}+\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \right)'_t = -\frac{1}{2\sigma} \frac{\ln(s/s^*)}{t^{3/2}} + \frac{1}{2\sigma} \cdot \frac{\tilde{\alpha}+\sigma^2}{t^{1/2}}$$

$$d'_{2_t} = -\frac{1}{2\sigma} \cdot \frac{\ln(s/s^*)}{t^{3/2}} + \frac{1}{2\sigma} \cdot \frac{\tilde{\alpha}}{t^{1/2}}$$

$$s(t) = \tilde{\alpha} t + \sigma z(t)$$

$$\boxed{g(x, t, \tilde{\alpha}) = \frac{x}{\sigma t^{3/2}} \varphi\left(\frac{x - \tilde{\alpha} t}{\sigma\sqrt{t}} \right)}$$

↳ плотность



$$\int_0^T e^{-rt} g(x,t,\tilde{\alpha})dt = e^{\beta_1 x} \int_0^T \underbrace{g(x,t,\xi)dt}_{G(x,t,\xi)} =$$

$$= e^{-\beta_1 x}\left(\Phi\left(\frac{-x+\xi T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + e^{\frac{2\xi x}{\sigma^2}}\Phi\left(\frac{-x-\xi T}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow (\text{при } T\to\infty) \quad \int_0^\infty e^{-rt} g(x,t,\tilde{\alpha})dt = e^{-\beta_1 x}$$

Но у нас тренд другой, т.е. у нас $(-\tilde{\alpha})$

Замена: $\tilde{\alpha} \to -\tilde{\alpha} \Rightarrow \beta_1 = \frac{-\tilde{\alpha}+\xi}{\sigma^2} \to \frac{\tilde{\alpha}+\xi}{\sigma^2} = -\beta_2$

$$\int_0^\infty e^{-rt}\frac{x}{\sigma t^{3/2}}\varphi\left(\frac{x+\tilde{\alpha}t}{\sigma\sqrt{t}}\right)dt = e^{\beta_2 x} \qquad (1)$$

$$\int_0^\infty e^{-rt}\frac{1}{\sigma t^{1/2}}\varphi\left(\frac{x+\tilde{\alpha}t}{\sigma\sqrt{t}}\right)dt = e^{\beta_2 x}\frac{1}{\xi} \qquad (2)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-rt}\varphi(d_2)}{2\sigma}\left[S^*\left(-\frac{\ln(S/S^*)}{t^{3/2}} + \frac{\tilde{\alpha}+\sigma^2}{t^{1/2}}\right) - \right.$$

$$\left. - K\left(-\frac{\ln(S/S^*)}{t^{3/2}} + \frac{\tilde{\alpha}}{t^{1/2}}\right)\right]dt =$$

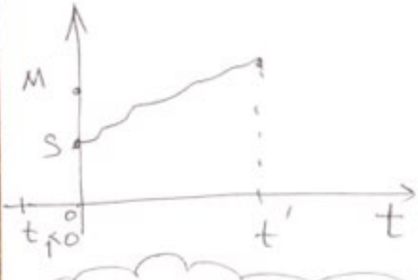
$$= \frac{1}{2}e^{-\beta_2 x}\left[\underbrace{S^*\left(-1+\frac{\tilde{\alpha}+\sigma^2}{\xi}\right) - K\left(-1+\frac{\tilde{\alpha}}{\xi}\right)}_{\text{нужно показать, что } =0}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}e^{+\beta_2 x}\left[\frac{K\beta_1}{\beta_1-1}\left(\frac{-\xi+\tilde{\alpha}+\sigma^2}{\xi}\right) - K\left(\frac{\tilde{\alpha}-\xi}{\xi}\right)\right]$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_1-1}\cdot(-\beta_1+1) + \beta_1 = 0$$

Оценка бесконечных экзотических опционов

Русский опцион:



$$M(t)=\max_{t_1\le t'\le t} S(t')$$

платёж: $M(t)$

Какова формула для стоимости?

$S(0)=S$, $M(0)=M$

$S\le M$

$$F(S,M)=\max_{\tau\geq 0} E\left[e^{-r\tau}M(\tau)\right]$$

$$M(\tau)=\max\left[M,\ \max_{0\le t'\le\tau} Se^{\tilde{\alpha}t'+\sigma z(t')}\right],$$

где $S(t')=Se^{\tilde{\alpha}t'+\sigma z(t')}$

Функция стоимости однородна по S и M, т.е.

$\lambda>0$: $F(\lambda S,\lambda M)=\lambda F(S,M)$

$F(S,M)\geq M$ потому что $\tau=0$

$\tau^*=\min\{t \mid F(S(t),M(t)) = M(t)\}$ – оптимальное решающее правило.

$\mathcal{E}=\{(S,M) \mid F(S,M)=M\}$ – множество немедленного исполнения

$\mathcal{E}^c=\{(S,M) \mid F(S,M)\geq M\}$ – множество допол. область немед. испол.

Утв ①:
Пусть в начал. момент времени $S = M$ (опцион исполнять не нужно)

$\Rightarrow \boxed{F(S,M) > M - S}$

▶ Урав-е Беллман:

$$F(S,M) = \max\left[M, e^{-rdt} E\left[F(S(dt), M(dt))\right]\right] \underset{\text{нужно доказать}}{>} S$$

$$S(dt) = Se^{\tilde{\alpha} dt + \sigma\sqrt{dt} X}$$

$$dz(0) \sim \mathcal{N}(0, dt)$$

$$\sqrt{dt}\ \frac{\sigma dz(0)}{\sqrt{dt}} \Rightarrow X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

? не знаю где закон-ся д-во утв 1

1) $\tilde{\alpha} dt + \sigma\sqrt{dt} X \geq 0$

$M(dt) = S(dt) = Se^{\tilde{\alpha} dt + \sigma\sqrt{dt} X}$

2) $\tilde{\alpha} dt + \sigma\sqrt{dt} X < 0$

$M(dt) = S = M$

$F(S(dt), M(dt)) \geq M(dt)$ выпол-ся всегда

$$E\left[F(S(dt), M(dt))\right] \geq E\left[M(dt)\right] =$$

$$= \int\limits_{\tilde{\alpha} dt + \sigma\sqrt{dt} X \geq 0} Se^{\tilde{\alpha} dt + \sigma\sqrt{dt} X} \varphi(x)\,dx + \int\limits_{\tilde{\alpha} dt + \sigma\sqrt{dt} X \leq 0} S\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{x \geq -\frac{\tilde{\alpha}\sqrt{dt}}{\sigma}} Se^{\tilde{\alpha} dt + \sigma\sqrt{dt} X} \varphi(x)\,dx + \int\limits_{x \leq -\frac{\tilde{\alpha}\sqrt{dt}}{\sigma}} S\cdot\varphi(x)\,dx = \left\{\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} =$$

$$= \sigma\sqrt{dt}\, x - \frac{x^2}{2} = -\frac{(x - \sigma\sqrt{dt})^2}{2} + \frac{\sigma^2}{2} dt \ \ominus$$

$$e^{\tilde{\alpha} dt + \frac{\sigma^2}{2} dt} = e^{\alpha t}, \quad \text{где} \quad \tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\ominus\, e^{\alpha dt} \int\limits_{x \geq -\frac{\tilde{\alpha}\sqrt{dt}}{\sigma}} S\cdot\varphi(\underbrace{x - \sigma\sqrt{dt}}_{y})\,dx + S\Phi\left(-\frac{\tilde{\alpha}\sqrt{dt}}{\sigma}\right) =$$

$$= e^{\alpha dt} S \int\limits_{-\frac{(\alpha + \sigma^2)\sqrt{dt}}{\sigma}} \varphi(y)\,dy + S\Phi\left(\frac{-\tilde{\alpha}\sqrt{dt}}{\sigma}\right) \ominus$$

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \varphi(0)\cdot x = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x$$

$$\boxed{=}\ S\left[(1+\alpha \cancel{dt})\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{(\tilde{\alpha}+\sigma^2)\sqrt{dt}}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\tilde{\alpha}\sqrt{dt}}{\sigma}\right]\right] =$$

$dt \ll \sqrt{dt}$

$$= S\left[1 + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{dt}\right] > S$$

т.е. мы доказали, что

$$E\left[F(S(dt), M(dt))\right] > S$$

$$F(S,M) = \max\left[S,\ e^{-rdt}E\left[F(S(dt), M(dt))\right]\right] > S$$

$$e^{-rdt}E[\ldots] \geq e^{-rdt}S\left(1 + \frac{\sigma\sqrt{dt}}{\sqrt{2\pi}}\right) = (1-rdt)S\left(1+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{dt}\right) > S$$

потому что

$$1 - rdt + \frac{\sigma\sqrt{dt}}{\sqrt{2\pi}} > 1$$

порядок

Рассмотрим $\mathcal{E}^c$: $F(S,M) > M$

$$F(S,M) = e^{-rdt}E\left[F(S(dt), M(dt))\right]$$

$|\cdot e^{-rdt}$ и вычитаем

$$F(S,M)\cdot(1-e^{-rt}) = e^{-rdt}E\left[dF(S,M)\right]$$

Применим формулу Ито:

$$F(S,M)\,r\,dt = E\left[F'_S\,dS(0) + \frac{1}{2}F''_{SS}(dS(0))^2 + \right.$$
$$\left. + F'_M\,dM(0) + F''_{SM}\,dS(0)\,dM(0) + \frac{1}{2}F''_{MM}(dM(0))^2\right]$$

$(S, M) \in \mathcal{E}^c$

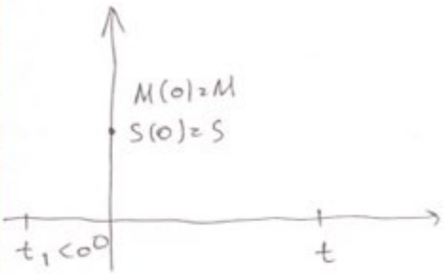
1) $S = M$ (граничное условие)

2) $S < M$ (дифф-е урав-е)

Следствие

06.11.19г.

Русский опцион:



$$\boxed{M(t) = \max_{t_1\le t'\le t} S(t') = \max\left[M, \max_{0\le t'\le t} S e^{\tilde\alpha t + \sigma z(t)}\right]}$$

$$M(0) = M = \max_{t_1\le t'\le 0} S(t')$$

$M(t)$ – платёж

$$F(S,M) = \max E\left[e^{-r\tau} M(\tau) \,\middle|\, S(0)=S,\ M(0)=M\right] \quad \text{однор. по } S \text{ и } M.$$

Условие однородн: $\lambda>0$: $F(\lambda S, \lambda M) = \lambda F(S,M)$

$F(S,M)$

$\mathcal{E} = \{(S,M) \mid F(S,M) = M\}$

$F(S(t), M(t)) = M(t)$

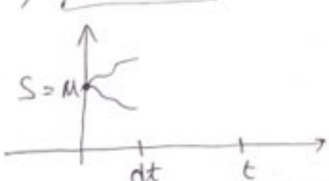
$S=M \Rightarrow (S,M)\notin\mathcal{E}$ $\quad F(S,M)>M$ (нужно подождать) (не торопиться прод. опцион)

$(S,M)\notin\mathcal{E}$

$$(1)\ rF\,dt = E\Big[\underbrace{F'_S\, dS(0)}_{\text{порядок: } \alpha S dt} + \underbrace{F'_M\, dM(0)}_{\sqrt{dt}} + \tfrac12 \underbrace{F''_{SS}(dS(0))^2}_{\sigma S^2 dt} + F''_{SM}\, dS(0)\, dM(0) + \tfrac12 F''_{MM}(dM(0))^2\Big]$$

$(S,M)\in\mathcal{E}$. Возможно 2 случ:

1) $\boxed{S=M}$



$$E[dM(0)] = E\left[(dS(0))^+\right] = E\left[(S(dt)-S)^+\right] =$$
$$= E\left[\left(S e^{\tilde\alpha dt + \sigma\sqrt{dt}X} - S\right)^+\right] \ominus$$

$dz(0) = \sqrt{dt}\,X$, $X\sim\mathcal{N}(0,1)$

$dM(0) = 0$, $dS(0)<0$

$dM(0) = dS(0)$, $dS(0)>0$

$$\ominus\ S\cdot \int\limits_{\substack{\tilde\alpha dt + \sigma\sqrt{dt}x \ge 0 \\ \text{акция растёт вверх}}} \left(e^{\tilde\alpha dt + \sigma\sqrt{dt}X} - 1\right)\varphi(x)\,dx = S\left[\Phi\left(\frac{\tilde\alpha+\sigma^2}{\sigma}\sqrt{dt}\right) - \Phi\left(\frac{\tilde\alpha dt}{\sigma}\right)\right] =$$

$= S\varphi(0)\,\sigma\sqrt{dt}$ $\quad$ из (1).

2) $\boxed{S<M}$: $\ \frac12\sigma^2 S^2 F''_{SS}(S,M) + \alpha S F'_S(S,M) - rF(S,M) = 0$

как решать это уравнение? $F'_M(M,M) = 0$ (гранич. усл.)

Воспользуемся однородностью F:

$$F(s,M) = MF\left(\frac{s}{M},1\right) = \left[\frac{s}{M}=p\right] = M\cdot F(p,1) = MH(p)$$

$$F_s{}' = M\cdot H'(p)\cdot\frac{1}{M} = H'(p)$$

$$F''_{ss} = H''(p)\cdot\frac{1}{M}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 p^2 H''(p) + \alpha p H'(p) - rH(p) = 0$$

$$H(p) = Ap^{\beta_1} + \hat{A}p^{\beta_2}, \quad \beta_{1,2} = \frac{-\tilde{\alpha} \pm \sqrt{(\tilde{\alpha})^2 + 2r\sigma^2}}{\sigma^2}$$

Нам не хватает вид области немедл. исполнения!

$$\mathcal{E} = \{(S,M) \mid F(S,M) = M\} = \{(S,M) \mid H(p) = 1\}$$

$p = \frac{S}{M}$ $\quad \mathcal{E}_p = \{p \mid H(p) = 1\}$

$F(S,M)$ не убывающ. по S

$F(p,1) = H(p)$ не убыв. на $[0,1]$, $p = \frac{S}{M} < 1$.

Воспользуемся ↗, чтобы показать св-во $\mathcal{E}_p$:

$0 < p_1 < p_2 \leq 1 \quad p_2 \in \mathcal{E}_p \Rightarrow p_1 \in \mathcal{E}_p$ докажем

$p_2 \in \mathcal{E}_p \Rightarrow H(p) = 1 \underset{\text{монот.}}{\geq} H(p_1) \underset{\text{потому что}}{\geq} 1 \quad \Rightarrow \quad H(p) = 1$

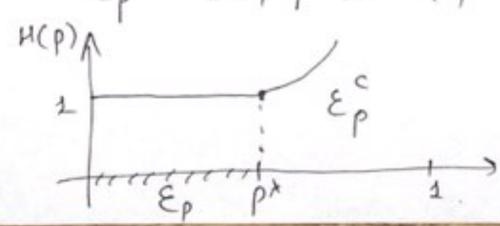
потому что $F(S,M) \geq M$ (можно поделить на M $H(p) \geq 1$)

$\Rightarrow p_1 \in \mathcal{E}_p$

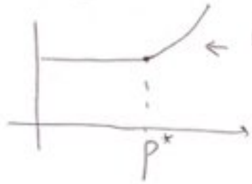
$\Rightarrow$ как устроено $\mathcal{E}_p$?

Определим $p^* = \max\{p \mid p \in \mathcal{E}_p\}$, $p \leq 1$.

$\Rightarrow \mathcal{E}_p = [0, p^*]$ → (представляет собой отрезок)



Наша задача определить $p, A, \hat{A}$.

$\Rightarrow$  $\leftarrow$ в этой области будет выпол. $\underline{\underline{H(p) = A p^{\beta_1} + \hat{A} p^{\beta_2}}}$

$$\begin{cases} H(p^*) = 1 & (1) \\ H'(p^*) = 0 & (2) \\ F'_M(M,M) = 0, \quad F(S,M) = MH(p) \end{cases}$$

$F'_M(S,M) = H(p) + M \cdot H'(p) \cdot \left(-\frac{S}{M^2}\right) = 0$ Подставим $S = M$

$F'_M(M,M) = H(p) - H'(1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} H(p^*) = 1 & (1) \\ H'(p^*) = 0 & (2) \\ H'(1) = H(1) & (3) \end{cases}$$

Осталось решить систему!

Решение:

$$\begin{cases} A(p^*)^{\beta_1} + \hat{A}(p^*)^{\beta_2} = 1 \\ A\beta_1 (p^*)^{\beta_1 \cancel{-1}} + \hat{A} \cdot \beta_2 (p^*)^{\beta_2 \cancel{-1}} = 0. \quad | \cdot (p^*) \\ A(\beta_1 - 1) = \hat{A}(1 - \beta_2). \end{cases}$$

$$\boxed{A = \frac{-\beta_2}{(\beta_1 - \beta_2)(p^*)^{\beta_1}}}$$

$$\boxed{\hat{A} = \frac{\beta_1}{(\beta_1 - \beta_2)(p^*)^{\beta_2}}}$$

$\beta_1 > 1, \quad \beta_2 < 0$

$$\boxed{p^* = \left(\frac{(-\beta_2)(\beta_1 - 1)}{(1 - \beta_2)\beta_1}\right)^{\frac{1}{\beta_1 - \beta_2}}}$$

Итак, напишем стоимость опциона, подставив $p^*, A, \hat{A}$:

- $F(S,M) = M \cdot H(p) = M\left[A p^{\beta_1} + \hat{A} p^{\beta_2}\right] =$
  $= \frac{M}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \left[-\beta_2 \cdot \left(\frac{S}{p^* M}\right)^{\beta_1} + \beta_1 \left(\frac{S}{p^* M}\right)^{\beta_2}\right]$, $\underline{\text{если } \frac{S}{M} = p > p^*}$.
- $F(S,M) = M$, $\underline{\text{если } \frac{S}{M} = p \le p^*}$.

круто решили!

Рассмотрим новый опцион:

look back put. – опцион на продажу

$\underbrace{M(t)}_{\text{цена}} - S(t) \geq 0$ т.е. Мы заставляем купить за такую цену (по цене $M(t)$)

$$\boxed{F(S,M) = \max_{\tau \geq 0} E\left[e^{-r\tau}(M(\tau) - S(\tau)) \middle| S(0)=S,\ M(0)=M\right]}$$

– однородн. по S и M.

(Обычно для опционов уравн-я одинаковы меняется только граничные условия)

$\mathcal{E} = \{(S,M) \mid F(S,M) = M - S\}$ – мн-во немедл. исполнения

$F(S,M) \geq M - S$

$\mathcal{E}^c = \{(S,M) \mid F(S,M) > M - S\}$

$F'_M(M,M) = 0$

$E[dM(0)] = O(\sqrt{dt})$

$(S,M) \in \mathcal{E}^c$: $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F''_{SS} + \alpha S F'_S - rF = 0$

$F(S,M) = MH(p)$, где $H(p) = Ap^{\beta_1} + \hat{A}p^{\beta_2}$

$\mathcal{E}_p = \{p \mid H(p) = 1 - p\}$, $H(p) \geq 1 - p$.

M – фиксир. $S_1 < S_2 \leq M$: $F(S_1,M) - F(S_2,M) \leq S_2 - S_1$ (1)

Давайте докажем нер-во ≥ 0

$F(S_1,M) + S_1 \leq F(S_2,M) + S_2$.

$F(S,M) + S$ → нужно пок-ть, что она по S не убыв.

$$F(S,M) + S = \max_{\tau \geq 0} E\left[e^{-r\tau}(M(\tau) - S(\tau))\right] + S =$$

$$= \max_{\tau \geq 0}\left\{\underbrace{E\left[e^{-r\tau}M(\tau)\right]}_{①\text{ по S не убыв.}} + \underbrace{S - E\left[e^{-r\tau}S(\tau)\right]}_{②\text{ по S не убыв.}}\right\}$$

$M(\tau) = \max\{M, \max_{0\le t\le \tau} S e^{\tilde\alpha t + \sigma z(t)}\}$ => ① по S не удов.

$$S - E[e^{-r\tau}S(\tau)] = \underbrace{S - E[e^{-r\tau} S\cdot e^{\tilde\alpha\tau + \sigma z(\tau)}]}_{\text{дост. д-ть, что } \ge 0}$$ (для ② показываем.)

$$E[e^{-r\tau}S(\tau)] \le E[e^{-r\tau}\underbrace{e^{\delta\tau}}_{\ge 1} S(\tau)] = \{\underbrace{r = \alpha + \delta}_{\text{усл-е риск-нейтральности}}\} =$$

$$= E[e^{-\alpha\tau}S(\tau) \mid S(0)=S] \le \{e^{-\alpha t}S(t) - \text{мартингал}\} \le S.$$

Давайте наше нер-во (1) поделим на M:

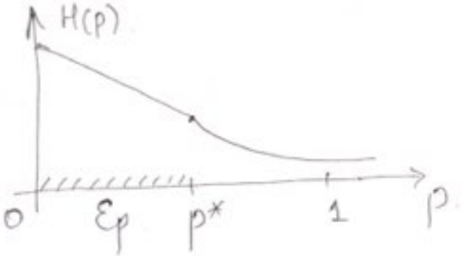
$\Rightarrow H(p_1) - H(p_2) \le p_2 - p_1$

$\mathcal{E}_p = \{p \mid H(p) = 1-p\}$, $p \le 1$.

$p_1 < p_2 \le 1$ $\boxed{p_2 \in \mathcal{E}_p \Rightarrow p_1 \in \mathcal{E}_p}$ Док-ся аналогично

$$\begin{cases} p_2 \in \mathcal{E}_p \quad H(p_2) = 1 - p_2 \\ \qquad H(p_1) \le H(p_2) + p_2 - p_1 = 1 - p_2 + p_2 - p_1 = 1 - p_1. \\ H(p_1) \ge 1 - p_2 \Rightarrow H(p_1) = 1 - p_1 \Rightarrow p_1 \in \mathcal{E}_p. \end{cases}$$

$\mathcal{E}_p = [0, p^*]$

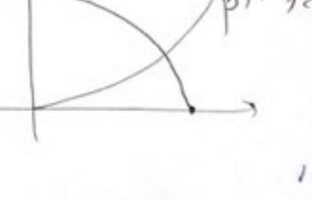


$$\begin{cases} H(p^*) = A(p^*)^{\beta_1} + \hat A (p^*)^{\beta_2} = 1 - p^* & (1) \\ p^* H(p^*) = A\beta_1 (p^*)^{\beta_1} + \hat A \beta_2 (p^*)^{\beta_2} = -p^* & (2) \\ (\beta_1 - 1) A = (1 - \beta_2)\hat A & (3) \end{cases}$$

$A, \hat A, p^*$ - ?

$$\boxed{A = \frac{-\beta_2 + p^*(\beta_2 - 1)}{(\beta_1 - \beta_2)\cdot (p^*)^{\beta_1}}} \qquad \boxed{\hat A = \frac{\beta_1 + (1-\beta_1)\cdot p^*}{(\beta_1 - \beta_2)(p^*)^{\beta_2}}}$$

$$\boxed{(p^*)^{\beta_1 - \beta_2} = \frac{(\beta_1 - 1)(-\beta_2 + p^*(\beta_2 - 1))}{(1-\beta_2)\cdot(\beta_1 + (1-\beta_1)p^*)}}$$



левая часть $\chi(p)$.

$\beta_1 > 1$, $\beta_2 < 0$

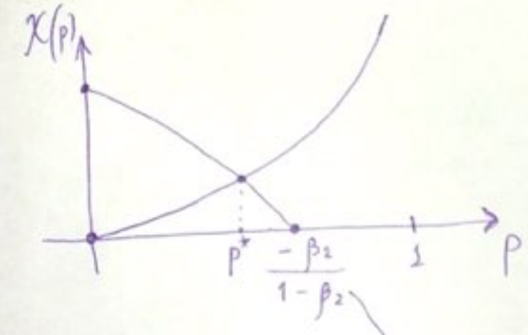
13.11.19 г

$$\chi'(p) = \frac{(\beta_2-1)\left[\beta_1+(1-\beta_1)p\right] - (1-\beta_1)\left[-\beta_2+p(\beta_2-1)\right]}{\left(\beta_1+(1-\beta_1)p\right)^2} =$$

$$= \frac{\beta_2\beta_1 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_2\beta_1}{\left(\beta_1+(1-\beta_2)p\right)^2} < 0$$

$$\underbrace{p = \frac{-\beta_2}{1-\beta_2}}_{\text{с помощью}}$$

ф-я fsolve : $0 \le p \le 1$

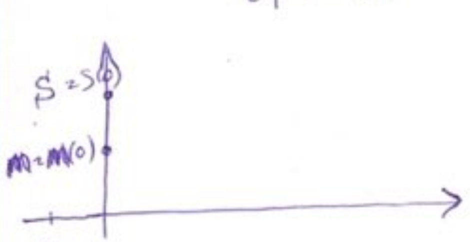


$$F(S,M) = MH\left(\frac{S}{M}\right) = \begin{cases} \dfrac{M}{\beta_1-\beta_2}\left[-\beta_2 + (\beta_2-1)p^*\left(\dfrac{S}{p^*M}\right)^{\beta_1} + \left(\beta_1+(1-\beta_1)p^*\right)\left(\dfrac{S}{p^*M}\right)^{\beta_2}\right], & \underbrace{p^* < \frac{S}{M} \le 1} \\ M - S, & \underbrace{p = \frac{S}{M} \le p^*} \end{cases}$$

---

look back call-опцион

$$m(t) = \min_{t_1 \le t' \le t} S(t'), \quad S(t) - m(t) \ge 0$$



$$\boxed{F(S,m) = \max_{\tau \ge 0} E\left[e^{-r\tau}(S(\tau) - m(\tau)) \,\middle|\, S = S(0),\ m = m(0)\right]}$$

удовл-т те же усл., что и для put

$$\mathcal{E} = \{(S,m) \mid F(S,m) = S - m\}$$

$$\mathcal{E}_p = \{p \geqslant 1 \mid H(p) = p - 1\}$$

$$F(S_2, m) - F(S_1, m) \le S_2 - S_1 \quad , \quad 0 < S_1 < S_2$$

Упр Д-ть ↑, аналогично предыдущ.

$$H(p_2) - H(p_1) \le p_2 - p_1$$

Лемма: $1 \le p_1 < p_2$. Если $p_1 \in \mathcal{E}_p \Rightarrow p_2 \in \mathcal{E}_p$

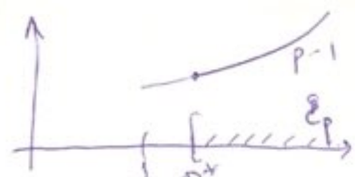
▶ $p_1 \in \mathcal{E}_p \Rightarrow H(p_1) = p_1 - 1$

$H(p_2) \le H(p_1) + p_2 - p_1 = \cancel{p_1} - 1 + p_2 - \cancel{p_1} = p_2 - 1 = H(p_2)$

$\Rightarrow p_2 \in \mathcal{E}_p$

$$p^* = \min\{p \geqslant 1 \mid p \in \mathcal{E}_p\} \quad \forall p \geqslant p^* \Rightarrow p \in \mathcal{E}_p.$$

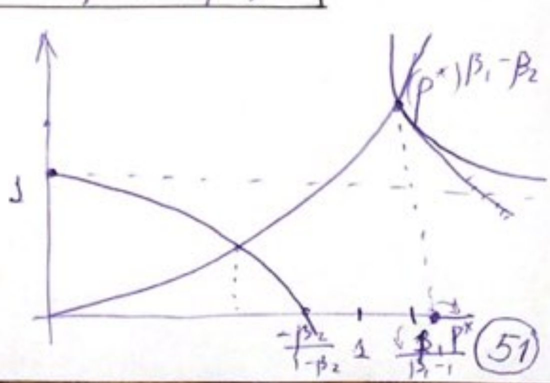
$$\mathcal{E}_p = [p^*, +\infty)$$



$$\left.\begin{array}{l} F'_m(m,m) = 0 \\ F'_M(M,M) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} H(p^*) = p^* - 1 & (1) \\ H'(p^*) = 1 & (2) \\ H(1) = H'(1) & (3) \end{array}\right.$$

$$\boxed{A = \frac{\beta_2 - p^*(\beta_2 - 1)}{(\beta_1 - \beta_2)(p^*)^{\beta_1}}} \quad ; \quad \boxed{\hat{A} = -\frac{\beta_1 + (1-\beta_1)p^*}{(\beta_1 - \beta_2)(p^*)^{\beta_2}}}$$

$$\boxed{(p^*)^{\beta_1 - \beta_2} = \frac{(\beta_1 - 1)(-\beta_2 + p^*(\beta_2 - 1))}{(1 - \beta_2)(\beta_1 + (1-\beta_1)p^*)}}$$



$$F(S,m)=mH\left(\frac{S}{m}\right)=\begin{cases}\dfrac{m}{\beta_1-\beta_2}\left[\left(\beta_2-(\beta_2-1)p^*\right)\left(\dfrac{S}{mp^*}\right)^{\beta_1}-\left(\beta_1+(1-\beta_1)p^*\right)\left(\dfrac{S}{mp^*}\right)^{\beta_2}\right], & 1\le\frac{S}{m}<p^*\\ S-m, & p^*\le\frac{S}{m}\end{cases}$$

Strangle – портфельный опцион.
(душить)

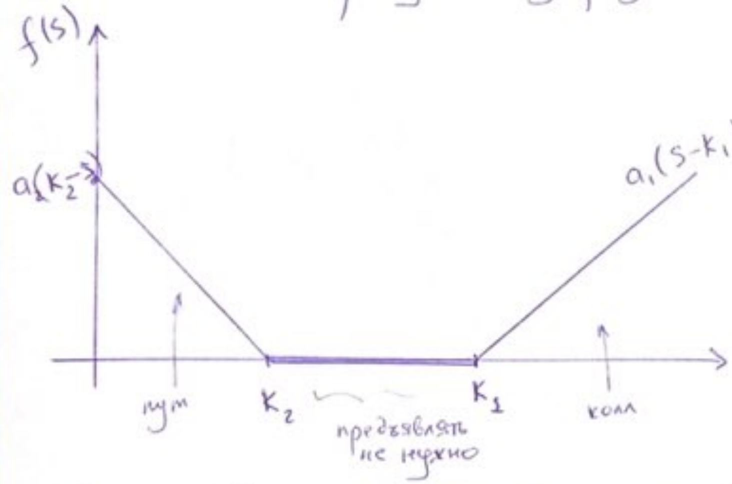
$$\boxed{f(S)=a_1\cdot(S-K_1)^+ + a_2\cdot(K_2-S)^+}$$

где a_1 – кол-во колл-опционов

a_2 – кол-во пут-опционов

$K_2<K_1$

Давайте попробуем изобразим график $f(S)$:



Установим свойства ф-ии $f(S)$

$$\boxed{F(S)=\max_{\tau\ge0} E\left[e^{-r\tau}f(S(\tau))\,\middle|\,S=S(0)\right]}$$

Свойства:

1° $f(S) \le a_1 S + a_2 K_2 \Rightarrow F(S) \le a_1 S + a_2 K_2$

2°. $F(S) \geqslant f(S)$

3°. Условие Липшица: $0 < S_1 < S_2$

$f(S_2) - f(S_1) \le a_1 (S_2 - S_1)$

Это следует из след нер-в:

$$\left.\begin{aligned} & a_1 (S_2 - K_1)^+ - a_1 (S_1 - K_1)^+ \le a_1 (S_2 - S_1) \\ & a_2 (K_2 - S_2)^+ - a_2 (K_2 - S_1)^+ \le 0 \end{aligned}\right\} +$$

$a_2 (K_2 - S)^+$ - моно

из $(3^\circ) \Rightarrow F(S_2) - F(S_1) \le a_1 (S_2 - S_1)$.

4° $0 < S_1 < S_2$

$f(S_1) - f(S_2) \le a_2 (S_2 - S_1)$ (Упр.): Д-ть.

$\Downarrow$

$F(S_1) - F(S_2) \le a_2 (S_2 - S_1)$

$\mathcal{E} = \{ S \mid F(S) = f(S) \}$ Какова структура $\mathcal{E}$?

Лемма 1: $\exists S > K_1 : S \in \mathcal{E}$

▶ $\forall S > K_1 : S \in \mathcal{E}^c$ ~~$F(S) = A$~~ $\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F'' + \alpha S F' - r F = 0$

$F(S) = A S^{\beta_1} + \hat{A} S^{\beta_2}$ ← решение

$A > 0$: докаж: $A \le 0$ $F(S) \le \hat{A} S^{\beta_2}$, $\beta_2 < 0$

$S \to \infty$ $F(S) \to 0$.

$F(S) \geqslant f(S) = a_1 (S - K_1)$ противор.

$A S^{\beta_1}$ растёт быстрее чем лин. - противор.

∎

Лемма 2: $k_1 < s_1 < s_2,\ s_1 \in \mathcal{E} \Rightarrow s_2 \in \mathcal{E}$.

▶ $s_1 \in \mathcal{E} \Rightarrow F(s_1) = a_1(s_1 - k_1) = f(s_1)$.

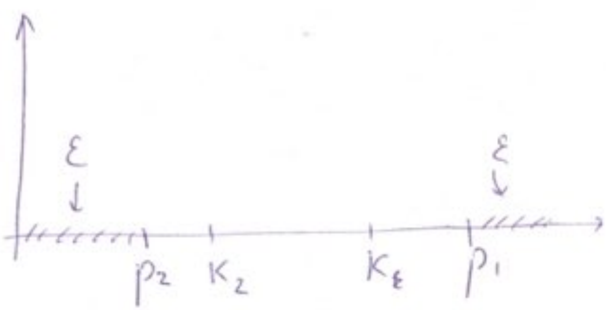
$f(s_2) \le F(s_2) \overset{(3^\circ)}{\le} F(s_1) + a_1(s_2 - s_1) = a_1(s_1 - k_1) + a_1(s_2 - s_1) = a_1(s_2 - k_1) = f(s_2)$.

$\Rightarrow F(s_2) = f(s_2) \Rightarrow s_2 \in \mathcal{E}$. ■

Лемма 3: $\exists\ 0 < s < k_2 : s \in \mathcal{E}$ ($s \to 0,\ s^{3/2} \to \pm\infty$)

Лемма 4: $0 < s_1 < s_2 < k_2 : s_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow s_1 \in \mathcal{E}$ (использ. 4° св.)

Упр. Лемма 3, 4 д-ть



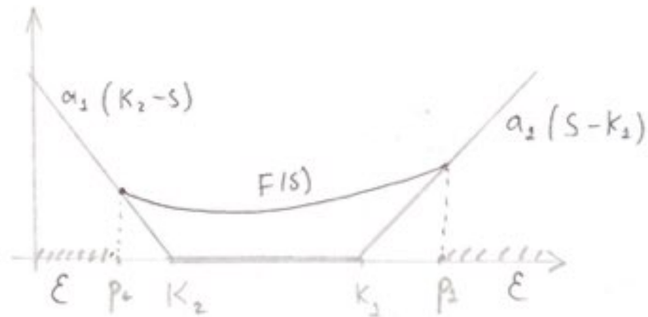
$p_1 = \min\{s > k_1 \mid s \in \mathcal{E}\}$

$p_2 = \max\{s < k_2 \mid s \in \mathcal{E}\}$

20.11.19г.

В прошлый раз мы рассмотрели Strangle (опцион)

$$f(S) = a_1\,(S-K_1)^+ + a_2\,(K_2-S)^+$$



$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F'' + rSF' - rF = 0$$

$$F(S) = A S^{\beta_1} + \hat{A} S^{\beta_2}, \quad p_2 < S < p_1, \quad A, \hat{A}, p_1, p_2 - ?$$

???

$$\begin{cases} F(p_1) = A p_1^{\beta_1} + \hat{A} p_1^{\beta_2} = a_1(p_1 - K_1) & (1') \\ p_1 F'(p_1) = \beta_1 A p_1^{\beta_1} + \beta_2 \hat{A} p_1^{\beta_2} = a_1 \beta_1 & (2') \\ F(p_2) = A p_2^{\beta_1} + \hat{A} p_2^{\beta_2} = a_2\,(K_2 - p_2) & (3') \\ p_2 F'(p_2) = \beta_1 A p_2^{\beta_1} + \beta_2 \hat{A} p_2^{\beta_2} = -a_2 p_2 & (4') \end{cases}$$

$$\boxed{A p_1^{\beta_1} = \frac{a_1 p_1 (1-\beta_2) + a_1 K_1 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}} \; (1); \quad \boxed{\hat{A} p_1^{\beta_2} = \frac{a_1 p_1 (\beta_1 - 1) - \beta_1 a_1 K_1}{\beta_1 - \beta_2}} \; (2)$$

$$\boxed{A p_2^{\beta_1} = -\frac{a_2 p_2 (1-\beta_2) + a_2 K_2 \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}} \; (3); \quad \boxed{\hat{A} p_2^{\beta_2} = -\frac{a_2 p_2 (\beta_1 - 1) - \beta_1 a_2 K_2}{\beta_1 - \beta_2}} \; (4)$$

Введем новую переменную:

$$\cancel{x = \frac{\beta_1}{\beta_2}} \qquad x = \frac{p_1}{p_2} > \frac{K_1}{K_2}$$

$$\frac{(1)}{(3)} \Rightarrow x^{\beta_1} = \frac{a_1 p_1 (1-\beta_2) + a_1 K_1 \beta_2}{-\left(a_2 p_2 (1-\beta_2) + a_2 K_2 \beta_2\right)} = \frac{a_1 x (1-\beta_2) + a_1 K_1 \frac{\beta_2}{p_2}}{-\left(a_2 (1-\beta_2) + a_2 K_2 \frac{\beta_2}{p_2}\right)}$$

$$\frac{\beta_2}{p_2}\left(a_1 K_1 + a_2 K_2 x^{\beta_1}\right) = -(1-\beta_2)\left(a_1 x + a_2 x^{\beta_1}\right) \quad (5)$$

$$\frac{(2)}{(4)} \Rightarrow x^{\beta_2} = \frac{a_1 x (\beta_1 - 1) - a_1 K_1 \frac{\beta_1}{p_2}}{-\left(a_2(\beta_1 - 1) - a_2 K_2 \frac{\beta_1}{p_2}\right)}$$

$$\frac{\beta_1}{\beta_2}\left(a_1K_1 + a_2K_2x^{\beta_2}\right) = (\beta_1-1)\left(a_1x + a_2x^{\beta_2}\right) \qquad (6)$$

$$\underbrace{\frac{\beta_1(1-\beta_2)}{(\beta_1-1)(-\beta_2)}}_{K_0} \cdot \frac{a_1x + a_2x^{\beta_1}}{a_1K_1 + a_2K_2x^{\beta_1}} = \frac{a_1x + a_2x^{\beta_2}}{a_1K_1 + a_2K_2x^{\beta_2}}$$

Нужно показать единственность решения

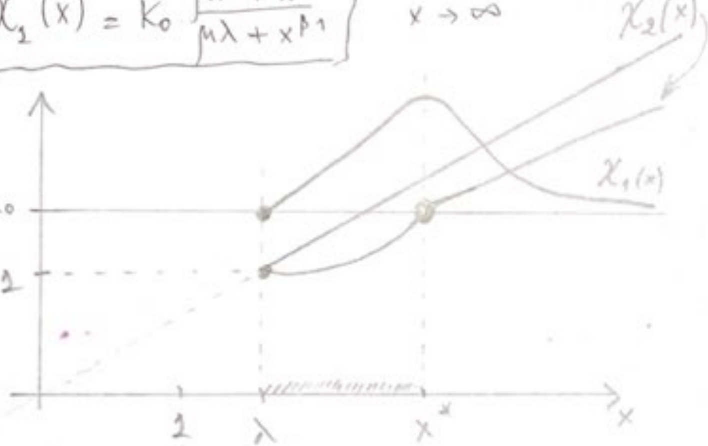
$$\lambda = \frac{K_1}{K_2}, \quad \mu = \frac{a_1}{a_2}$$

#комментарии

$$\boxed{\underbrace{K_0 \cdot \frac{\mu x + x^{\beta_1}}{\mu\lambda + x^{\beta_1}}}_{\chi_1(x)}} = \boxed{\underbrace{\frac{\mu x + x^{\beta_2}}{\mu\lambda + x^{\beta_2}}}_{\chi_2(x)}}$$

Посмотрим как ведут себя функции $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$

$$\boxed{\chi_1(x) = K_0 \frac{\mu x + x^{\beta_1}}{\mu\lambda + x^{\beta_1}}} \qquad x \to \infty$$



$$\chi_1'(x) = K_0 \cdot \frac{(\mu + \beta_1x^{\beta_1-1})(\mu\lambda + x^{\beta_1}) - \beta_1x^{\beta_1-1}(\mu x + x^{\beta_1})}{(\mu\lambda + x^{\beta_1})^2} =$$

$$= K_0 \cdot \frac{\mu^2\lambda + \beta_1\mu\lambda x^{\beta_1-1} + \mu x^{\beta_1} - \mu\beta_1x^{\beta_1}}{(\mu\lambda + x^{\beta_1})^2} = 0$$

$$\mu\lambda + \beta_1\lambda x^{\beta_1-1} + x^{\beta_1} - \beta_1x^{\beta_1} = 0$$

$\mu\lambda + \beta_1\lambda x^{\beta_1-1} + (1-\beta_1)x^{\beta_1} = 0$ # нужно доказать

Сделаем замену переменных:

$y = x^{\beta_1-1}$: $\mu\lambda + \beta_1\lambda y + (1-\beta_1)y^{\frac{\beta_1}{\beta_1-1}} = 0$

$x = \lambda \Rightarrow y = \lambda^{\beta_1-1}$

$\mu\lambda + \beta_1\lambda^{\beta_1} + (1-\beta_1)\lambda^{\beta_1} \geq 0.$

(56) Тем самым мы показали, что x^* - единств.

What about function $\mathcal{X}_2(x)$?

$$\boxed{\mathcal{X}_2(x) = \frac{\mu x + x^{\beta_2}}{\mu\lambda + x^{\beta_2}}}$$ # Понятно, что $\mathcal{X}_2(\lambda) = 1$ (график ↗)

$$\mathcal{X}_2(x) = \frac{\mu x + x^{\beta_1}}{\mu\lambda + x^{\beta_1}} < \frac{x}{\lambda}$$

$$\mu\lambda x + \lambda x^{\beta_1} < \mu\lambda x + x^{\beta_1+1}$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \lambda < x$$

$$\mathcal{X}_2'(x) = \frac{(\mu + \beta_2 x^{\beta_2-1})(\mu\lambda + x^{\beta_1}) - (\mu x + x^{\beta_2})(\beta_2 x^{\beta_2-1})}{(\mu\lambda + x^{\beta_2})^2} =$$

$$= \frac{\mu^2\lambda + \mu\lambda\beta_2 x^{\beta_2-1} + \mu x^{\beta_2} - \beta_2\mu x^{\beta_2}}{(\mu\lambda + x^{\beta_1})^2} > 0$$ # нужно показать.

$$\mu \underbrace{\beta_2}_{<0} x^{\beta_1-1} \underbrace{(\lambda - x)}_{<0} > 0$$

Теперь нужно показать, что при $x \in [\lambda, x^*]$ $\boxed{\mathcal{X}_1(x) > \frac{x}{\lambda}}$

т.е. ф-ии $\mathcal{X}_1(x)$ и $\mathcal{X}_2(x)$ не могут пересекаться.

$$\mathcal{X}_1(x) = K_0 \cdot \frac{\mu x + x^{\beta_1}}{\mu\lambda + x^{\beta_1}} \geq K_0 \cdot \frac{\mu x + x^{\beta_1}}{\mu\lambda + \frac{\mu\lambda + \beta_1\lambda x^{\beta_1-1}}{\beta_1 - 1}} = K_0 \cdot \frac{\mu x + x^{\beta_1}}{\frac{\beta_1\lambda(\mu + x^{\beta_1-1})}{\beta_1 - 1}} =$$

$$\mathcal{X}'(x) \geq 0 \quad : \quad x^{\beta_1} \leq \frac{\mu\lambda + \beta_1\lambda x^{\beta_1-1}}{\beta_1 - 1}$$

$$= K_0 \frac{\beta_1 - 1}{\beta_1} \cdot \frac{x}{\lambda} = \frac{1-\beta_2}{-\beta_2} \cdot \frac{x}{\lambda} > \frac{x}{\lambda}$$

$$K_0 = \frac{\beta_1 \cdot (1-\beta_2)}{(\beta_1 - 1)\cdot(-\beta_2)}$$

; Вспоминаем, что $x = \frac{p_1}{p_2}$ или $p_1 = x p_2$.

$$\frac{\beta_2}{p_2}(a_1 K_1 + a_2 K_2 x^{\beta_1}) = -(1-\beta_2)(a_1 x + a_2 x^{\beta_1})$$

$$F(S) = \begin{cases} A S^{\beta_1} + \hat{A} S^{\beta_2}, & p_2 < S < p_1 \\ a_1 (S - K_1), & S \geq p_1 \\ a_2 (K_2 - S), & 0 \leq S \leq p_2 \end{cases}$$

Опционы на два актива

$S_i(t), \quad i=1,2.$

$dS_i(t) = S_i(t)(\alpha_i\,dt + \sigma_i dz_i(t)), \quad i=1,2$

$z_1(t), \; z_2(t)$

Они коррелированы, т.е. $dz_1(t)\cdot dz_2(t) = \rho dt$, ρ - число коррел. $\rho \in (-1,1)$

До этого мы определяли

$(dz_1(t))^2 = (dz_2(t))^2 = dt.$

$\rho > 0$
$dz_1(t) > 0 \Rightarrow dz_2(t) > 0.$

$\delta_i > 0$ дивид.

$r = \alpha_1 + \delta_1 = \alpha_2 + \delta_2$

Опцион Margrabe

(обмена: вторая акция меняется на первую)

$S_1(t) - S_2(t) > 0$ - платёж.

Определим стоимость опциона:

$s_1 = S_1(0), \quad s_2 = S_2(0)$

$$\boxed{F(s_1, s_2) = \max_{\tau \geq 0} E\left[e^{-r\tau}(S_1(\tau) - S_2(\tau)) \,|\, S_1 = S_1(0),\ S_2 = S_2(0)\right]}$$

Свойства:

1) F полож. однородная: $F(\lambda s_1, \lambda s_2) = \lambda F(s_1, s_2)$, $\lambda \geq 0$.

$S_1(\tau) = s_1 e^{\tilde{\alpha}_1\tau + \sigma_1 z_1(\tau)}$

$S_2(\tau) = s_2 e^{\tilde{\alpha}_2\tau + \sigma_2 z_2(\tau)}$

2) $F(s_1, s_2) \geq (s_1 - s_2)^+$

3) F удовл-т усл. Липшица по S_1

$s_1' < s_1''$, $F(s_1'', s_2) - F(s_1', s_2) \leq s_1'' - s_1'$

(Док-ся соверш. аналог. как для обычного опциона)

$\mathcal{E} = \{(s_1, s_2) \,|\, F(s_1, s_2) = s_1 - s_2\}$

мн-во немедленного исполнения

$\mathcal{E}^c = \{(s_1, s_2) \,|\, F(s_1, s_2) > s_1 - s_2\}$ # мн-во продолж.

Выводим уравнение Беллмана (кажется правильно написал)

$$F(S_1, S_2) = e^{-rdt} E\left[F(S_1(dt), S_2(dt))\right] \quad \Big|\cdot e^{-rdt} \text{ и вычтем}$$

$$F(1-e^{-rdt}) \approx Frdt = \underbrace{e^{-rdt}}_{1} E[dF] =$$

Для dF применим формулу Ито.

$$= E\left[F'_{S_1} dS_1 + F'_{S_2} dS_2 + \frac{1}{2} F''_{S_1S_1}(dS_1)^2 + F''_{S_1S_2} dS_1 dS_2 + \frac{1}{2} F''_{S_2S_2}(dS_2)^2\right] \ominus$$

$$dS_1(0) = dS_1(0) = S_1(\alpha_1 dt + \sigma_1 \underbrace{dz_1(0)}_{\text{если взять } E \Rightarrow =0})$$

$$(dS_1)^2 = \sigma_1^2 S_1^2 dt$$

dS_2 – аналогично

$$dS_1 \cdot dS_2 = \sigma_1 \sigma_2 S_1 S_2 \underbrace{dz_1(0) \cdot dz_2(0)}_{\rho} \cancel{dt}$$

$$\ominus\ \alpha_1 S_1 F'_{S_1} \cancel{dt} + \alpha_2 S_2 F'_{S_2} \cancel{dt} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 F''_{S_1S_1} \cancel{dt} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 F''_{S_1S_2} \cancel{dt} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 F''_{S_2S_2} \cancel{dt}$$

Получаем след. дифф-е ур-е в области $\underline{\underline{\mathcal{E}^c}}$: $(S_1, S_2) \in \mathcal{E}^c$

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 F''_{S_1S_1} + \rho S_1 S_2 \sigma_1 \sigma_2 F''_{S_1S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 F''_{S_2S_2} + \alpha_1 S_1 F'_{S_1} + \alpha_2 S_2 F'_{S_2} - rF = 0$$

27.11.19 г

$S_i(t)$, α_i, σ_i $\quad z_1(t), z_2(t)$ – они коррел., т.е

$dz_1(t)\, dz_2(t) = \rho\, dt$, $\rho \in (-1, 1)$

Опцион Margrabe – опцион обмена (акция 2-го типа меняется на акцию 1-го типа)

$$\left(S_1(t) - S_2(t)\right)^+$$

$$F(S_1, S_2) \geq (S_1 - S_2)^+$$

$$\mathcal{E}^c = \{(S_1, S_2) \mid F(S_1, S_2) > (S_1 - S_2)^+\}$$

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 F''_{S_1 S_1} + \rho\sigma_1\sigma_2 S_1 S_2 F''_{S_1 S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 F''_{S_2 S_2} + \alpha_1 S_1 F'_{S_1} + \alpha_2 S_2 F'_{S_2} - rF = 0$$

$$F(S_1, S_2) = S_2 \cdot F\left(\frac{S_1}{S_2}, 1\right) = S_2 H(p), \quad p = \frac{S_1}{S_2}$$

Посчитаем производные:

$$F'_{S_1} = S_2 \cdot H' \cdot \frac{1}{S_2} = H'$$

$$F''_{S_1 S_1} = H'' \cdot \frac{1}{S_2}$$

$$F''_{S_1 S_2} = H'' \cdot \left(-\frac{S_1}{S_2^2}\right) = -p\frac{H''}{S_2}$$

$$F'_{S_2} = H - S_2 H' \cdot \frac{S_1}{S_2^2} = H - pH'$$

$$F''_{S_2 S_2} = \cancel{-H'\frac{S_1}{S_2^2}} + \cancel{\frac{S_1}{S_2^2}H'} + pH''\frac{S_1}{S_2^2} = \frac{p^2 H''}{S_2}$$

Теперь подставим:

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \cdot H'' \cdot \frac{1}{S_2} + \rho\sigma_1\sigma_2 \cdot S_1 \cdot S_2 \cdot (-p) \cdot \frac{H''}{S_2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 S_2^2 p^2 \frac{H''}{S_2} + \alpha_1 S_1 H' + \alpha_2 S_2 (H - pH') -$$

$$- rS_2 H = 0$$ Давайте поделим на S_2

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2, \quad \alpha = \alpha_1 - \alpha_2, \quad \tilde{\alpha} = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$$

усл. риск-нейтр.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 H''(p) + \alpha p H'(p) - \delta_2 H(p) = 0 \qquad \alpha_2 - r = \alpha_2 - (\alpha_2 + \delta_2) = -\delta_2$$

$$H(p) = Ap^{\theta_1} + \hat{A}p^{\theta_2}$$

$$\theta_{1,2} = \frac{-\tilde{\alpha} \pm \sqrt{\tilde{\alpha}^2 + 2\delta_2\sigma^2}}{\sigma^2}$$

$\theta_2 < 0$, Надо показать, что $\theta_1 > 1$

Условие Липшица:

$F(S_1, S_2)$: $\boxed{F(S_1'', S_2) - F(S_1', S_2) \le S_1'' - S_1'}$, где штрих - не произ.!

$S_1' < S_1''$

Д-во: τ - марковский момент

$S_i(\tau) = S_i\, e^{\tilde{\alpha}_i \tau + \sigma_i z_i(\tau)}$

т.е. $\begin{cases} S_1'(\tau) = S_1' e^{\tilde{\alpha}_1 \tau + \sigma_1 z_1(\tau)} \\ S_1''(\tau) = S_1'' e^{\tilde{\alpha}_1 \tau + \sigma_1 z_1(\tau)} \end{cases}$ $-$

$S_1''(\tau) - S_1'(\tau) = \underbrace{(S_1'' - S_1')}_{>0} e^{\tilde{\alpha}_1 \tau + \sigma_1 z_1(\tau)} > 0$

Вспомним св-во мартингала:

$e^{-\alpha_1 t} S_1(t)$ - мартингал $\iff r = \alpha_1 + \delta_1$

$E\left[e^{-\alpha_1 \tau} S_1(\tau) \mid S_1(0) = S_1\right] \le S_1$

$E\left[e^{-\alpha_1 \tau} S_1 e^{\tilde{\alpha}_1 \tau + \sigma_1 z_1(\tau)}\right] \le S_1$ (обе части умножаем на $S_1'' - S_1'$)

$$E\left[e^{-\alpha_1 \tau}(S_1''(\tau) - S_1'(\tau))\right] \le S_1'' - S_1' \quad (1)$$

$F(S_1'', S_2) - F(S_1', S_2) \overset{\text{по опр}}{=} \max\limits_{\tau \ge 0} E\left[e^{-r\tau}(S_1''(\tau) - S_2(\tau))^+\right] - \max\limits_{\tau \ge 0} E\left[e^{-r\tau}(S_1'(\tau) - S_2(\tau))^+\right] \le$

$\le \max\limits_{\tau \ge 0} E\left[e^{-r\tau}(\underbrace{S_1''(\tau) - S_1'(\tau)}_{>0})\right] \le \max\limits_{\tau \ge 0} E\left[\underbrace{e^{-r\tau} e^{\delta_1 \tau}}_{e^{-\alpha_1 \tau}}(S_1''(\tau) - S_1'(\tau))\right] \overset{(1)}{\le}$

$(a'' - b)^+ - (a' - b)^+ \le a'' - a'$, $a'' > a'$

$\le S_1'' - S_1'$

#

Итак, мы доказали условие Липшица.

Дальше рассм-м мн-во немедл. испол. опциона:

$\mathcal{E} = \{(S_1, S_2) \mid F(S_1, S_2) = S_1 - S_2\}$

$F(S_1, S_2) \ge (S_2 - S_1)^+ \quad \Big| : S_2$

$\Downarrow$

$H(p) \ge (p-1)^+$

$\mathcal{E}_p = \{p \mid H(p) = p - 1\}$

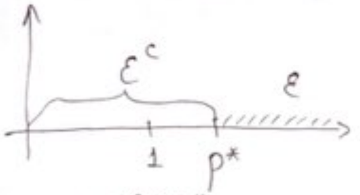
$p_1 = \frac{S_1'}{S_2}$, $p_2 = \frac{S_1''}{S_2}$, $p_1 < p_1$

Напишем усл. Л. для ф-ии H: $H(p_2) - H(p_1) = p_2 - p_1$.

$\boxed{p_1 \in \mathcal{E}_p}$, $p_2 > p_1 \overset{\text{Доказываем}}{\Rightarrow} \boxed{p_2 \in \mathcal{E}_p}$: $H(p_1) = p_1 - 1$.

$H(p_2) \le H(p_1) + p_2 - p_1 = p_1 - 1 + p_2 - p_1 = p_2 - 1 \le H(p_2) \Rightarrow H(p_2) = p_2 - 1$.
закончили док-во.

$p^* = \min\{p \mid p \in \mathcal{E}_p\} > 1$



$0 < p < p^*$

$H(p) = A p^{\theta_1} + \hat{A} p^{\theta_2}$, $\theta_2 < 0$, $p \to 0 \Rightarrow \hat{A} = 0$

Наша задача найти A, p^*

$H(p^*) = A(p^*)^{\theta_1} = p^* - 1$

$p^* H'(p^*) = \theta_1 A (p^*)^{\theta_1} = p^*$

$\frac{1}{\theta_1} = \frac{p^* - 1}{p^*} = 1 - \frac{1}{p^*} \Rightarrow \boxed{p^* = \frac{\theta_1}{\theta_1 - 1}}$ порог. $\longrightarrow$ (это как $S^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1}$)

$p(t) = \frac{S_1(t)}{S_2(t)} < p^*$

как только $p(t)$ достигает $p^* \to$ обмен опциона!

$$A = \frac{p^*}{\theta_1 (p^*)^{\theta_1 - 1}} = \frac{(\theta_1 - 1)^{\theta_1 - 1}}{\theta_1^{\theta_1}}$$

Осталось подставить A и p^* в ф-ю H:

$$F(S_1, S_2) = \begin{cases} S_2 H(p) = S_2 (\theta_1 - 1)^{\theta_1 - 1} \left(-\frac{S_1}{S_2 \theta_1}\right)^{\theta_1}, & p = \frac{S_1}{S_2} < p^* \\ S_1 - S_2, & \frac{S_1}{S_2} \geqslant p^* \end{cases}$$

! А что если $(S_2(t) - S_1(t))^+$?

$\sigma^2 = \sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2$

$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$

$$\Rightarrow F(S_1, S_2) = \begin{cases} S_1 H(p) = S_1 (\theta_1 - 1)^{\theta_1 - 1} \left(-\frac{S_2}{S_1 \theta_1}\right)^{\theta_1}, & p = \frac{S_2}{S_1} < p^* \\ S_2 - S_1, & \frac{S_2}{S_1} \geqslant p^* \end{cases}$$

Последний опцион, кот. надо рассм-ть

Альтернативный опцион

$\max[S_1(t), S_2(t)]$ (забирают тот опцион, котор. max. цена) ~~стоит дорож~~

$$\boxed{F(S_1, S_2) = \max_{\tau \geq 0} E\left[e^{-r\tau} \max[S_1(t), S_2(t)] \mid S_i(0) = S_i,\ i = 1,2\right]}$$

Свойства:

1) Однородна
2) $F(S_1, S_2) \geq \max[S_1, S_2]$
3) Условие Липшица

Утв. Если $S_1 = S_2 \Rightarrow (S_1, S_2) \notin \mathcal{E}$

$$S_i(dt) = S_i e^{\tilde{\alpha}_i dt + \sigma_i \sqrt{dt}\, X_i}, \quad i = 1,2$$

$$X_i = \frac{dz_i(0)}{\sqrt{dt}} \sim N(0,1)$$

$$\operatorname{cov}(X_1, X_2) = \operatorname{cov}\left(\frac{dz_1(0)}{\sqrt{dt}}, \frac{dz_2(0)}{\sqrt{dt}}\right) =$$

$$= E\left[\frac{dz_1(0) \cdot dz_2(0)}{dt}\right] = E\left[\frac{\rho\, \cancel{dt}}{\cancel{dt}}\right] = \rho \in (-1, 1)$$

$$Z = \frac{\sigma_1 X_1 - \sigma_2 X_2}{\sigma} \sim N(0,1)$$

$$\operatorname{Var} Z = E\left[\frac{(\sigma_1 X_1 - \sigma_2 X_2)^2}{\sigma^2}\right] = \frac{\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2}{\sigma^2} = 1$$

$$\operatorname{cov}(X_1, Z) = \operatorname{cov}\left(X_1, \frac{\sigma_1 X_1 - \sigma_2 X_2}{\sigma}\right) = \frac{\sigma_1 - \rho\sigma_2}{\sigma} = \rho_1 \in (-1, 1)$$

(X_1, Z) — двумерно норм распр. случ. величина

$$\psi(X_1, Z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_1^2}} e^{-\frac{(X_1^2 - 2\rho_1 X_1 Z + Z^2)}{2\cdot(1-\rho_1^2)}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_1^2}} \cdot e^{-\frac{(X_1 - \rho_1 Z)^2}{2(1-\rho_1^2)} - \frac{Z^2}{2}}$$

Уравн-е Беллмана:

на самом деле $\longrightarrow$

$$F(S_1, S_2) = \max\left[S_1, e^{-rdt} E\left[F(S_1(dt), S_2(dt))\right]\right] > \underline{\underline{S_1}}$$

нужно доказать!

$$\geqslant \max\left[S_1, e^{-rdt} E\left[\max\left[S_1(dt), S_2(dt)\right]\right]\right] > \underline{\underline{S_1}}$$

$$S_1(dt) = S_1 e^{\tilde{\alpha}_1 dt + \sigma_1 \sqrt{dt} X_1}$$

$$S_2(dt) = S_2 e^{\tilde{\alpha}_2 dt + \sigma_2 \sqrt{dt} X_2}$$

1) $S_1(dt) \geqslant S_2(dt) \iff$

$$\tilde{\alpha}_1 dt + \sigma_1 \sqrt{dt} X_1 \geqslant \tilde{\alpha}_2 dt + \sigma_2 \sqrt{dt} X_2$$

$$\tilde{\alpha}_1 \sqrt{dt} + \sigma_1 X_1 \geqslant \tilde{\alpha}_2 \sqrt{dt} + \sigma_2 X_2$$

$$(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)\sqrt{dt} + \sigma_1 X_1 - \sigma_2 X_2 \geqslant 0 \quad | \div \sigma$$

$$\frac{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2}{\sigma}\sqrt{dt} + \underbrace{\frac{\sigma_1 X_1 - \sigma_2 X_2}{\sigma}}_{Z} \geqslant 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{Z \geqslant -\frac{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2}{\sigma}\sqrt{dt}}$$

$$E\left[\max\left[S_1(dt), S_2(dt)\right]\right] = \int\limits_{z \geqslant -\frac{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2}{\sigma}\sqrt{dt}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_1 e^{\tilde{\alpha}_1 dt + \sigma_1 \sqrt{dt} X_1} \varphi(X_1, z)\, dX_1 dz$$

$$+ \int\limits_{z \leqslant -\frac{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2}{\sigma}\sqrt{dt}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_2 e^{\tilde{\alpha}_2 dt + \sigma_2 \sqrt{dt} X_2} \varphi(X_2, z)\, dX_2 dz = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \int\limits_{z \geqslant -\frac{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2}{\sigma}\sqrt{dt}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} S_1 e^{\tilde{\alpha}_1 dt + \sigma_1 \sqrt{dt} X_1} \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho_1^2}} e^{-\frac{(X_1 - \rho_1 z)^2}{2(1-\rho_1^2)} - \frac{z^2}{2}} dX_1 dz =$$

$$\tilde{X}_1 \sim \mathcal{N}(\rho_1 z, 1 - \rho_1^2)$$

$$E\left[e^{\lambda \tilde{X}_1}\right] = e^{\lambda^2 \underbrace{\frac{(1-\rho_1^2)}{2}}_{\text{дисп.}} + \lambda \underbrace{\rho_1 z}_{\text{мат. ож.}}} \rightarrow \text{(производящая Ф-я)}$$

$$\text{⊜} \int\limits_{z \geq -\frac{\tilde{\alpha}_1 - \alpha_2}{\sigma}\sqrt{dt}} S_1 e^{\tilde{\alpha}_1 dt} e^{\overbrace{\sigma_1^2 \frac{dt(1-\rho_1^2)}{2} + \sigma_1\sqrt{dt}\rho_1 z - \frac{z^2}{2}}} dz =$$

немного преобр-м

$$\tilde{\alpha}_1 = \alpha_1 - \frac{\sigma_1^2}{2}$$

$$= S_1 \int\limits_{z \geq -\frac{\tilde{\alpha}_1 - \alpha_2}{\sigma}\sqrt{dt}} e^{\alpha_1 dt} \frac{e^{-(z - \sigma_1 S_1 \sqrt{dt})^2}}{\sqrt{2\pi}} dz$$

07.12.19г

$\max [S_1(t), S_2(t)]$

Свойства:

1) $F(S_1, S_2) \geq \max[S_1, S_2]$

2) $S_1'' > S_1' \Rightarrow F(S_1'', S_2) - F(S_1', S_2) \leq S_1'' - S_1'$

3) $F(S_1, S_2)$ не убывает по S_1

$\mathcal{E} = \{(S_1, S_2) \mid F(S_1, S_2) = \max[S_1, S_2]\}$

Утв:

нужно это д-ть

Если $S_1 = S_2 \Rightarrow \boxed{(S_1, S_2) \notin \mathcal{E}}$ $\quad (F(S_1, S_1) > S_1.)$

$F(S_1, S_2) \geq e^{-r\,dt} E[\max[S_1(dt), S_2(dt)]] = I_1 + I_2$.

$$I_1 = e^{-r dt} S_1 \int\limits_{-\frac{(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)}{\sigma}\sqrt{dt}}^{\infty} e^{\alpha_1 dt} e^{-\frac{(z - \sigma_1 \rho_1 \sqrt{dt})^2}{2}} dz \;\text{⊜}, \quad r = \alpha_1 + \delta_1$$

{немного преобразуем интеграл}

$$\text{⊜} \left[z_1 = z - \sigma_1 \rho_1 \sqrt{dt}\right] = e^{-\delta_1 dt} S_1 \int\limits_{-\frac{(\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2)}{\sigma}\sqrt{dt} - \rho_1 \rho_1 \sqrt{dt}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_1^2}{2}} dz_1 =$$

$$= \left[\frac{\tilde{\alpha}_1 - \tilde{\alpha}_2}{\sigma} + \sigma_1 \rho_1 = \frac{\alpha_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} - \alpha_2 + \frac{\sigma_2^2}{2}}{\sigma} + \sigma_1 \left(\frac{\sigma_1 - \rho \sigma_2}{\sigma} \right) = \right.$$

$$= \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{\sigma_1^2}{2} + \frac{\sigma_2^2}{2} - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \Bigg] =$$

$$= e^{-\delta_1 dt} \cdot S_1 \int_{-\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\sqrt{dt}}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_1^2}{2}}}_{=\varphi(z_1)} dz_1 = e^{-\delta_1 dt} \cdot S_1 \cdot \left(1 - \Phi\left(-\frac{(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{dt}}{\sigma}\right)\right) =$$

$$= e^{-\delta_1 dt} \cdot S_1 \cdot \Phi\left(\frac{(\alpha_1-\alpha_2+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{dt}}{\sigma}\right) = I_1$$

I_2 – получается аналогично, т.е

$$I_2 = e^{-\delta_2 dt} \cdot S_1 \cdot \Phi\left(\frac{(\alpha_2-\alpha_1+\frac{\sigma^2}{2})\sqrt{dt}}{\sigma}\right)$$

Теперь разложим I_1 и I_2

$\Rightarrow I_1 + I_2 > S_1$, $\quad \Phi(0) = \frac{1}{2}$

$$I_1 + I_2 = S_1\left(\frac{1}{2} + \varphi(0)\left(\frac{\alpha_1-\alpha_2+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\sqrt{dt}\right) +$$

$$+ S_1\left(\frac{1}{2} + \varphi(0)\left(\frac{\alpha_2-\alpha_1+\frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\right)\sqrt{dt}\right) = S_1 + S_1\varphi(0)\frac{\sigma}{2}\sqrt{dt} > S_1.$$

тем самым утв. доказано ∎

Теперь посмотрим на структуру $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \{(S_1, S_2) \mid F(S_1, S_2) = \max[S_1, S_2]\} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2,$$

где $\mathcal{E}_1 = \{(S_1, S_2) \in \mathcal{E} \mid F(S_1, S_2) = S_1\}$

$\mathcal{E}_2 = \{(S_1, S_2) \in \mathcal{E} \mid F(S_1, S_2) = S_2\}$.

$F(S_1, S_2) = S_2 H(p)$, $p = \frac{S_1}{S_2}$.
- однородна

$$\mathcal{E}_p = \{ p \mid H(p) = \max[p, 1] \}$$

$$\mathcal{E}_{1p} = \{ p \mid H(p) = p \}$$

$$\mathcal{E}_{2p} = \{ p \mid H(p) = 1 \}$$

$\boxed{H(p) \geq \max[p, 1]}$ – это верно всегда, потому что $\Rightarrow$ дост. поделить на S_2.
$F(S_1, S_2) \geq \max[S_1, S_2]$

I. $H(p)$: $p_1 < p_2 \Rightarrow H(p_2) - H(p_1) \leq p_2 - p_1$ усл. Липшица.

II. $H(p)$: не убывает.

Из (I) и (II) установим св-ва $\mathcal{E}_{1p}$ и $\mathcal{E}_{2p}$:

Свойства:

1) $\mathcal{E}_{1p}$: $p_1 < p_2$ и $p_1 \in \mathcal{E}_{1p} \Rightarrow \boxed{p_2 \in \mathcal{E}_{1p}}$.

▶ $p_1 \in \mathcal{E}_{1p} \Rightarrow H(p_1) = p_1$.
По (I): $H(p_2) \leq H(p_1) + p_2 - p_1 = \cancel{p_1} + p_2 - \cancel{p_1} = p_2 \leq H(p_2)$.
$\Rightarrow H(p_2) = p_2 \Rightarrow p_2 \in \mathcal{E}_{1p}$

(Это св-во поможет опр-ть структуру $\mathcal{E}_{1p}$, т.е.
$c_1 = \min\{ p \mid p \in \mathcal{E}_{1p} \} \geq 1$, $\boxed{\mathcal{E}_{1p} = [c_1, \infty)}$)

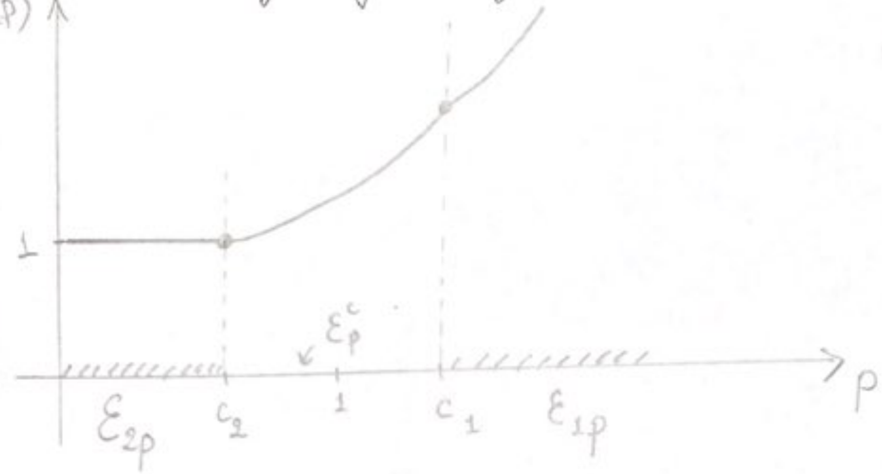
2) $\mathcal{E}_{2p}$: $p_1 < p_2$ и $p_2 \in \mathcal{E}_{2p} \Rightarrow \boxed{p_1 \in \mathcal{E}_{2p}}$

▶ В силу монотонности (т.е. H – не убывает)
$H(p_1) \leq H(p_2) = 1 \leq H(p_1) \Rightarrow H(p_1) = 1 \Rightarrow p_1 \in \mathcal{E}_{2p}$ ■

(Это св-во — " —— $c_2 = \max\{p \mid p \in \mathcal{E}_{2p}\} < 1$)

$$\boxed{\mathcal{E}_{2p} = (0, c_2]}$$

Давайте нарисуем график:



$$H(p) = A p^{\theta_1} + \hat{A} p^{\theta_2}, \quad \theta_{1,2} = \frac{-\tilde{\alpha} \pm \sqrt{(\tilde{\alpha})^2 + 2r\sigma_2}}{\sigma^2}$$

Найти $A, \hat{A}, c_1, c_2$.

Чтобы их найти, следует записать ур-е, а именно

$$\begin{cases} H(c_1) = A c_1^{\theta_1} + \hat{A} c_1^{\theta_2} = c_1 \\ c_1 H'(c_1) = \theta_1 A c_1^{\theta_1} + \theta_2 \hat{A} c_1^{\theta_2} = c_1 \\ H(c_2) = A c_2^{\theta_1} + \hat{A} c_2^{\theta_2} = 1 \\ c_2 H'(c_2) = \theta_1 A c_2^{\theta_1} + \theta_2 \hat{A} c_2^{\theta_2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} & A c_1^{\theta_1} = \frac{c_1(1-\theta_2)}{\theta_1 - \theta_2} \quad (1) \\ & \hat{A} c_1^{\theta_2} = \frac{c_1(\theta_1 - 1)}{\theta_1 - \theta_2} \quad (2) \\ & A c_2^{\theta_1} = \frac{-\theta_2}{\theta_1 - \theta_2} \quad (3) \\ & \hat{A} c_2^{\theta_2} = \frac{\theta_1}{\theta_1 - \theta_2} \quad (4) \end{aligned}$$

(1) : (3)

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\theta_1} = \frac{c_1(1-\theta_2)}{(-\theta_2)} \quad (5)$$

(2) : (4)

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\theta_2} = \frac{c_1(\theta_1 - 1)}{\theta_1} \quad (6)$$

$(5):(6)$

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\theta_1-\theta_2} = \frac{(1-\theta_2)}{(-\theta_2)} \cdot \frac{\theta_1}{(\theta_1-1)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{c_1}{c_2} = \left(\frac{1-\theta_2}{-\theta_2} \cdot \frac{\theta_1}{\theta_1-1}\right)^{\frac{1}{\theta_1-\theta_2}}}$$

Из (5) находим c_1:

$$c_1 = \frac{(-\theta_2)}{1-\theta_2} \cdot \left(\frac{(1-\theta_2)}{(-\theta_2)} \cdot \frac{\theta_1}{\theta_1-1}\right)^{\frac{\theta_1}{\theta_1-\theta_2}} = \left(\frac{1-\theta_2}{(-\theta_2)}\right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1-\theta_2}} \left(\frac{\theta_1}{\theta_1-1}\right)^{\frac{\theta_1}{\theta_1-\theta_2}}$$

$$c_2 = \frac{(-\theta_2)}{1-\theta_2} \cdot \left(\frac{(1-\theta_2)\cdot\theta_1}{(-\theta_2)(\theta_1-1)}\right)^{\frac{\theta_1-1}{\theta_1-\theta_2}} = \left(\frac{1-\theta_2}{-\theta_2}\right)^{\frac{\theta_2-1}{\theta_1-\theta_2}} \left(\frac{\theta_1}{\theta_1-1}\right)^{\frac{\theta_1-1}{\theta_1-\theta_2}}$$

Из (3),(4) находим A и $\hat{A}$:

$$A = \frac{(-\theta_2)}{\theta_1-\theta_2} \cdot \frac{1}{c_2^{\theta_1}} \quad \text{и} \quad \hat{A} = \frac{\theta_1}{\theta_1-\theta_2} \cdot \frac{1}{c_2^{\theta_2}}$$

$$F(S_1,S_2) = \begin{cases} S_2 \cdot H(p) = S_2\left(A\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\theta_1} + \hat{A}\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{\theta_2}\right) & c_2 < \frac{S_1}{S_2} < c_1 \\ S_1, & \frac{S_1}{S_2} \geqslant c_1 > 1 \\ S_2, & \frac{S_1}{S_2} \leq c_2 < 1. \end{cases}$$

запросать...

Оптимальное реш. правило:

$p(t) = \frac{S_1(t)}{S_2(t)}$ $\quad p(t) \geq C_1$ — сразу надо предъявлять.

$p(t) \leq C_2$